Mesures avec des microoscillateurs mécaniques

Correction

I Généralités sur les oscillateurs mécaniques

1. La pulsation de résonance Ω_0 de l'oscillateur est :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \Longrightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{1}$$

2. Le terme $M\Omega_0\dot{x}$ a les dimensions d'une accélération par une masse, donc d'une force. Q **est donc sans dimension**.

3. Pour un oscillateur au repos, $\dot{x} = 0$ et, comme la **distribution des vitesses** des molécules qui baignent l'oscillateur est isotrope, il y a le même nombre de collisions de particules pour chaque classe de vitesses $[v_x, v_x + dv_x]$ des 2 côtés : la force est donc nulle.

   Par contre, pour $\dot{x} = v_0 \neq 0$, la distribution de vitesses des molécules dans le référentiel associé à la masse M, qui est la **distribution de Maxwell-Boltzmann** de départ décalée de v_0, n'est plus symétrique : il y a alors un excès de collisions de la part des molécules du côté vers lequel se déplace la masse, et donc une **force opposée au mouvement**.

   En faisant un bilan des collisions, on peut montrer que la force de frottement associée dépend linéairement de la vitesse v_0, mais ce n'est pas demandé ici.

4. L'équation du mouvement selon (Ox) s'écrit :

$$M\ddot{x} = -kx - (M\Omega_0/Q)\,\dot{x} + F_{\text{ext}}(t). \tag{2}$$

5. En régime sinusoïdal, on trouve, avec la convention de signe $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\mathrm{t}}$ utilisée :

$$\begin{aligned} -M\Omega^2\,\underline{x}(\Omega) &= -M\Omega_0^2\,\underline{x}(\Omega) - (M\Omega_0/Q)(-i\Omega\,\underline{x}(\Omega)) + \underline{F}_\Omega & (3)\\ \Longrightarrow \underline{x}(\Omega) &= \underline{\chi}(\Omega)\,\underline{F}_\Omega, & (4)\\ \text{avec } \underline{\chi}(\Omega) &= \frac{1}{M}\frac{1}{\Omega_0^2 - \Omega^2 - i\Omega\Omega_0/Q}. & (5) \end{aligned}$$

   $\underline{\chi}(\Omega)$ est la **susceptibilité mécanique**.

6. La figure 1 présente l'allure de la dépendance de $|\underline{\chi}(\Omega)|^2$ et des variations de phase de $\underline{\chi}(\Omega)$ avec la pulsation Ω.

7. Les expressions approchées pour $\Omega \ll \Omega_0$, $\Omega = \Omega_0$ et $\Omega \gg \Omega_0$ font apparaître trois comportements :
   - **Basse fréquence** : $\Omega \ll \Omega_0$
     L'excitation est suffisamment lente pour que le déplacement soit **en phase** avec la force excitatrice. La réponse en amplitude est faible, mais plate en fréquence :

$$\chi(\Omega \ll \Omega_0) \simeq 1/M\Omega_0^2 = 1/k. \tag{6}$$

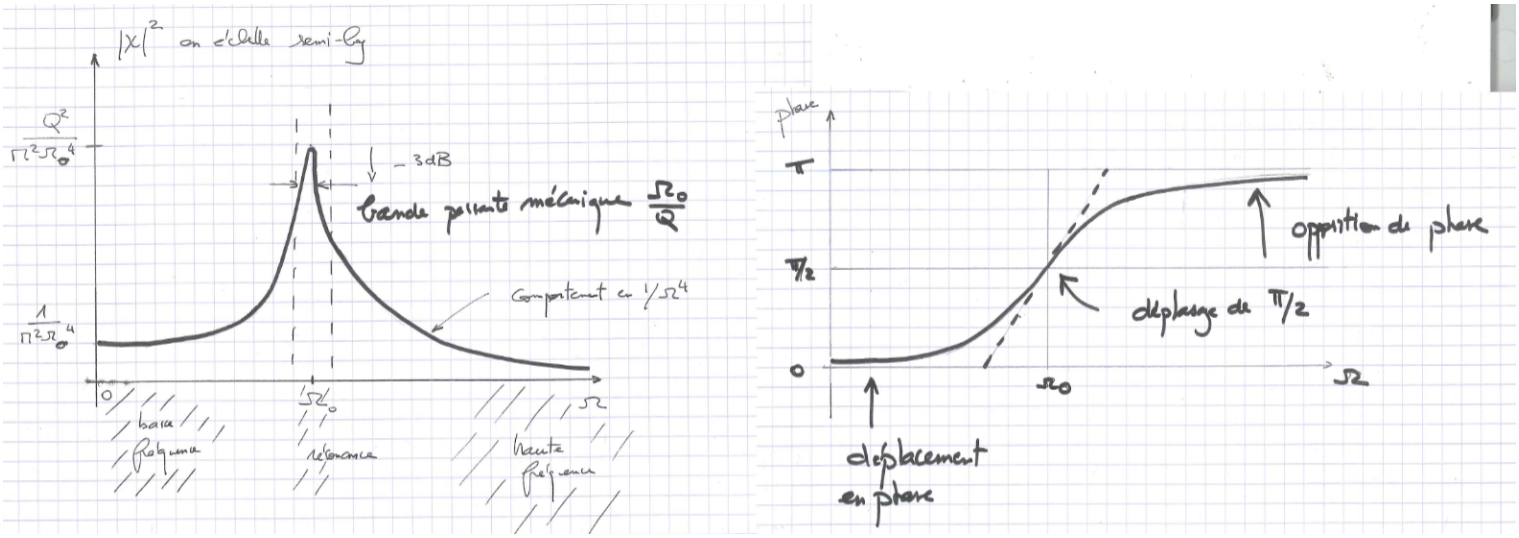


FIGURE 1 – **Réponse mécanique**.

— **Résonance** : $\Omega \simeq \Omega_0$ et plus précisément $|\Omega - \Omega_0|/\Omega_0 \ll 1/Q$
L'amplitude de la réponse est maximale :

$$|\chi(\Omega \simeq \Omega_0)| \simeq Q/M\Omega_0^2. \tag{7}$$

A résonance exacte, la phase est exactement $\pi/2$: la réponse est en **quadrature de phase** avec l'excitation, ce qui maximise la puissance transférée et dissipée (intégrale prise sur un cycle) :

$$\mathcal{P} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \int F_{\text{ext}} v \, dt. \tag{8}$$

Par contre, la phase de la réponse varie rapidement autour de la fréquence de résonance, typiquement sur la **bande passante** Ω_0/Q (bande de fréquence sur laquelle la réponse mécanique perd un facteur $1/\sqrt{2}$, soit 3 dB en puissance), qu'on peut trouver en écrivant une expression approchée de χ au voisinage de la résonance :

$$\chi(\Omega \simeq \Omega_0) \simeq \frac{iQ}{M\Omega_0^2} \frac{1}{1 + 2i\frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0/Q}}. \tag{9}$$

— **Haute fréquence** : $\Omega \gg \Omega_0$
L'excitation est trop rapide. L'inertie de l'oscillateur ne lui permet pas de suivre. La réponse décroît rapidement avec la fréquence et la réponse est en **opposition de phase**. Le résonateur se comporte en fait comme une particule libre, pour laquelle :

$$\chi(\Omega \gg \Omega_0) = -\frac{1}{M\Omega_0^2}. \tag{10}$$

I-A Systèmes continus

8. La **tension** $\mathcal{T}$ est une **force** et s'exprime en N, soit en kg.m.s^{-2}.
   La **masse linéïque** μ s'exprime sans surprise en kg.m^{-1}.

9. L'équation de la corde vibrante, qu'on peut retrouver dans de nombreux livres de mécanique, est :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\mathcal{T}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{11}$$
   La célérité c des ondes est alors :
$$c = \sqrt{\mathcal{T}/\mu}. \tag{12}$$
   Elle augmente avec la tension et diminue avec la masse linéïque (à cause de l'inertie).

10. Les fréquences f_n de résonance de la corde sont obtenues en cherchant des solutions sinusoïdales en temps de l'éq. (11) avec les conditions aux limites strictes :
$$u(z=0) = u(z=L) = 0 \tag{13}$$
$$f_n = n\,\frac{c}{2L} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^\star. \tag{14}$$
    Les profils des modes propres correspondants $u_n(z)$ sont tracés sur la figure 2 :
$$u_n(z) = (...) \sin k_n z, \text{ avec } k_n = \Omega_n/c = n\pi/L. \tag{15}$$

11. L'analogue électrique du système masse-ressort est un oscillateur LC utilisant des composantes discrets alors que celui de la corde est une cavité (à une dimension) électromagnétique.

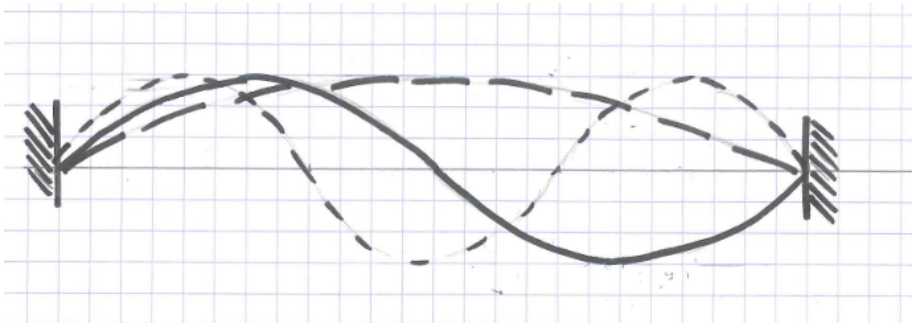


FIGURE 2 – **Trois premiers modes propres d'une corde vibrante fixée à ses extrémités**. Tirets longs : mode fondamental à f_1. Ligne pleine : premier mode excité à f_2. Tirets courts : deuxième mode excité à f_3.

II Bruit thermique d'un oscillateur mécanique

II-A Collisions entre des particules microscopiques et une masse macroscopique

12. Pour un oscillateur au repos, il n'y a pas de déséquilibre entre les particules se déplaçant dans les deux sens : il y a donc autant de collisions de la part de ces particules et la **force moyenne est nulle** (au cours du temps). Par contre, sur un intervalle de temps donné, il peut y avoir des **fluctuations** du nombre de collisions de part et d'autre, et donc un déséquilibre. Cela entraîne des **fluctuations de position** de l'oscillateur, qu'on appelle **mouvement Brownien**, qui dépend de la température T.

13. On a **deux quantités conservées** : la **quantité de mouvement** (puisque le système est supposé **isolé**, et de toute façon, la collision dure très peu de temps) et l'**énergie cinétique** totale puisque la collision est **élastique**, ce qui s'écrit :

$$MV + mv = MV' + mv' \tag{16}$$
$$\frac{1}{2}(MV^2 + mv^2) = \frac{1}{2}(MV'^2 + mv'^2). \tag{17}$$

14. Ce système se réécrit :

$$M(V - V') = m(v' - v) \tag{18}$$
$$V + V' = v + v'. \tag{19}$$

La dernière relation traduit **l'inversion de la vitesse relative des deux particules** dans le référentiel du centre de masse :

$$V' - v' = -(V - v). \tag{20}$$

15. On en déduit :

$$V' = \frac{M - m}{M + m}V + \frac{2m}{M + m}v \tag{21}$$
$$v' = \frac{m - M}{M + m}v + \frac{2M}{M + m}V. \tag{22}$$

La 2ème relation n'est pas demandée (elle ne servira pas par la suite). Elle est juste écrite pour insister sur la symétrie $\{m \leftrightarrow M,\ v \leftrightarrow V\}$.

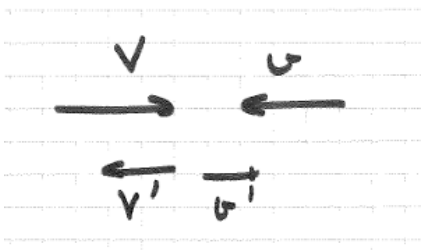


FIGURE 3 – **Géométrie de la collision étudiée.**

16. La variation ΔE_c d'énergie cinétique de la masse M lors de la collision s'écrit alors :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 \tag{23}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}M\left[\frac{M-m}{M+m}V + \frac{2m}{M+m}v\right]^2 - \frac{1}{2}MV^2 \tag{24}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 V^2 + \left(\frac{2m}{M+m}\right)^2 v^2 + \frac{4m(M-m)}{(M+m)^2}vV\right]^2 - \frac{1}{2}MV^2 \tag{25}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}M\left[\left(1 - \frac{4mM}{(M+m)^2}\right)V^2 + ... + \frac{4m(M-m)}{(M+m)^2}vV\right]^2 - \frac{1}{2}MV^2 \tag{26}$$

$$\Delta E_c = \frac{4mM}{(m+M)^2}\left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}(M-m)vV\right]. \tag{27}$$

17. On peut vérifier :
    — pour $m = M$, on a bien échange $v \leftrightarrow V$ et donc $\Delta E_c = \left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}MV^2\right]$
    — pour $m \ll M$, à énergies cinétiques initiales fixées, la collision perturbe peu la masse M et $\Delta E_c \to 0$
    — pour $m \gg M$ (cas-limite peu pertinent ici), on a le même résultat par symétrie.

18. Sur un ensemble de collisions, $\langle vV \rangle = \langle v \rangle V = 0$ par **isotropie** de la distribution des vitesses des particules de masse m.

19. En prenant la valeur moyenne de l'éq. (27), on a immédiatement la relation de récurrence suivante :

$$\langle E_{c,n+1} \rangle - \langle E_{c,n} \rangle = \frac{4mM}{(m+M)^2}\big(e_c - \langle E_{c,n} \rangle\big). \tag{28}$$

20. Cette **suite arithmético-géométrique** a comme **valeur pivot** évidente e_c. On peut en faire apparaître la **raison** r en écrivant :

$$\langle E_{c,n+1} \rangle - \langle E_{c,n} \rangle = \frac{4mM}{(m+M)^2}\big(e_c - \langle E_{c,n} \rangle\big) \tag{29}$$

$$\langle E_{c,n+1} \rangle - e_c = \langle E_{c,n} \rangle - e_c + \frac{4mM}{(m+M)^2}\big(e_c - \langle E_{c,n} \rangle\big) \tag{30}$$

$$\langle E_{c,n+1} \rangle - e_c = \left(1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right)\left(\langle E_{c,n} \rangle - e_c\right). \tag{31}$$

On a donc une suite arithmético-géométrique de raison :

$$r = 1 - \frac{4mM}{(m+M)^2} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 < 1, \tag{32}$$

et on obtient :

$$\langle E_{c,n} \rangle - e_c = \left(\langle E_{c,0} \rangle - e_c\right) r^n. \tag{33}$$

21. On a toujours $r < 1$. La suite $\langle E_{c,n} \rangle$ tend donc vers e_c, qui est l'énergie cinétique moyenne des particules microscopiques. On retrouve donc le **théorème d'équipartition de l'énergie** et on identifie e_c à l'**énergie thermique** :

$$e_c = \frac{1}{2}k_B T. \tag{34}$$

A noter que dans le cas $m = M$ (peu pertinent ici), il y a un échange direct d'énergie cinétique entre la masse M et la première particule avec laquelle elle subit une collision, et on a donc une convergence immédiate.

22. Dans le cas où $m \ll M$, on peut écrire :

$$\langle E_{c,n}\rangle - e_c = \left(1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right)^n (\langle E_{c,0}\rangle - e_c) \quad (35)$$

$$\langle E_{c,n}\rangle - e_c \simeq \exp\left(-n\frac{4mM}{(m+M)^2}\right)(\langle E_{c,0}\rangle - e_c) \quad (36)$$

$$\langle E_{c,n}\rangle - e_c \simeq \exp(-n/n_c)\,(\langle E_{c,0}\rangle - e_c)\,, \quad (37)$$

avec le **nombre typique n_c de collisions** nécessaires pour atteindre l'équilibre :

$$n_c = \frac{(m+M)^2}{4mM} \simeq \frac{M}{4m}. \quad (38)$$

Dans le cas $m \ll M$ (ou, de façon symétrique, $m \gg M$, même si ça ne correspond pas à la situation étudiée ici), on a $r \simeq 1$ (mais bien toujours $r < 1$) et la convergence est très lente.

23. Les collisions entre les particules de masse m peuvent être traitées de la même façon. On a vu que dans le cas $m = M$, il y a simplement permutation de l'énergie cinétique entre les 2 particules, donc ces collisions ne changent évidemment pas l'énergie cinétique moyenne e_c du bain thermique et ne modifient donc pas le raisonnement précédent.

II-B Mouvement de l'oscillateur sous l'effet des collisions

24. La collision est très courte, avec une durée $\tau_c \ll$ T (période de l'oscillateur). On peut donc négliger la variation de l'impulsion totale du système, puisque la force élastique n'a pas le temps de fournir un travail. On a donc un simple **échange de quantité de mouvement** entre la masse M et la particule microscopique, et donc une réinitialisation de la vitesse de l'oscillateur.

25. Si $\tau \gg$ T, le ressort a le temps de faire un grand nombre d'oscillations avant la collision suivante, ce qui égalise en moyenne ses énergies cinétique et potentielle avant la collision suivante. On a donc une convergence :

$$E_p \longleftrightarrow E_c \longleftrightarrow e_c.$$

La convergence représentée par la flèche de gauche est liée aux oscillations qui égalisent les valeurs moyennes des énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur sur plusieurs oscillations. La seconde est liée aux collisions, qui font converger l'énergie cinétique moyenne de l'oscillateur vers la valeur commune de cette énergie pour les particules de masse m.

On retrouve de nouveau le **théorème d'équipartition de l'énergie**, maintenant **étendu** à l'énergie cinétique et à l'**énergie potentielle** de l'oscillateur harmonique.

26. Cette valeur commune est l'énergie thermique $\frac{1}{2}k_BT$.

27. Pour $m \simeq M$, $r \ll 1$ et une seule collision suffit à modifier significativement l'énergie cinétique de l'oscillateur. Ce cas correspond donc à la figure (a).
La figure (b) correspond elle au cas (plus pertinent physiquement) $m \ll M$: chaque collision modifie très peu l'énergie cinétique, et il faut une accumulation de ces collisions pour la modifier de façon significative. L'amplitude (ou l'enveloppe) du mouvement $x(t)$ évolue donc de façon plus progressive au cours du temps. L'échelle temporelle ΔT_1 correspond à la période de l'oscillateur $\mathrm{T} = 2\pi/\Omega_0$ et ΔT_2 à l'échelle caractéristique de variation de l'amplitude, qui est reliée à l'amortissement, soit $Q\mathrm{T}$.

III Mesure de force avec un oscillateur mécanique

III-A Principe de la mesure de force

28. Comme $\mathcal{F}_0/d^4$ a les dimensions d'une force, $\mathcal{F}_0$ s'exprime en $\mathrm{N.m^4}$, soit en $\mathrm{kg.m^5.s^{-2}}$.
29. Le déplacement Δx de l'oscillateur sous l'effet d'une force F d'un nanonewton est :
$$\Delta x = \frac{F}{M\Omega_0^2} = \frac{10^{-9}}{0{,}6.10^{-6} \times (2\pi \times 138)^2} \simeq \frac{10^{-9}}{0{,}5.10^{-6} \times (10^3)^3} \simeq 2\,\mathrm{nm}. \tag{39}$$

Dans la suite, on prendra $f_0 = 138{,}275$ Hz et $M = 0{,}6$ mg.

30. Il faut a priori comparer ce **déplacement statique** sous l'effet de la force à l'**amplitude du mouvement d'agitation thermique** Δx_T :
$$\Delta x_T = \sqrt{\frac{k_B T}{M\Omega_0^2}} = \sqrt{\frac{1{,}38.10^{-23} \times 300}{0{,}6.10^{-6} \times (2\pi \times 138)^2}} \simeq \left(\frac{4.10^{-21}}{0{,}6}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}8\,\mathrm{nm}. \tag{40}$$
Le déplacement statique est donc supérieur à Δx_T : on peut donc envisager de le mesurer.

Mais il est difficile à séparer du déplacement imposé à la masse (qui se fait en présence de la force, qu'on ne peut pas annuler...). On va donc réaliser une **mesure indirecte** de la force en considérant son **effet sur la fréquence de résonance**.

31. L'équation du mouvement est :
$$M\ddot{x} = -M\Omega_0^2 x + \frac{\mathcal{F}_0}{(d-x)^4} \tag{41}$$
avec l'axe (Ox) orienté vers la gauche (la composante de la force attractive est alors bien positive). En faisant un développement limité pour $|x(t)| \ll d$, on trouve :
$$M\ddot{x} = -M\Omega_0^2 x + \frac{\mathcal{F}_0}{d^4}\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-4} \tag{42}$$
$$M\ddot{x} \simeq -M\Omega_0^2 x + \frac{\mathcal{F}_0}{d^4} + \frac{\mathcal{F}_0}{d^4}\frac{4x}{d} \tag{43}$$
$$M\ddot{x} \simeq -\left(M\Omega_0^2 - \frac{4\mathcal{F}_0}{d^5}\right)x + \frac{\mathcal{F}_0}{d^4} \tag{44}$$
On retrouve le déplacement statique et la force (en fait, le gradient de la force) modifie la **fréquence f du mouvement** $x(t)$, qui vérifie :
$$f^2 = f_0^2 - \frac{K}{d^5} \text{ avec } K = \frac{\mathcal{F}_0}{M\pi^2} \tag{45}$$

32. Pour présenter les résultats, on a intérêt à tracer $f^2 - f_0^2$ en fonction de $1/d^5$ pour avoir des résultats de mesure a priori alignés sur une droite.

33. Pour $|f - f_0| \ll f_0$ (approximation vérifiée a posteriori), on a $f^2 - f_0^2 \simeq 2 f_0 \Delta f$:

$$\Longrightarrow \Delta f = f - f_0 \simeq -\frac{\mathcal{F}_0}{2M f_0 \pi^2 d^5} \simeq -\frac{10^{-33}}{0{,}6.10^{-6} \times 2 \times 10 \times (10^{-6})^5 \times 100} \simeq -1\,\text{Hz}. \quad (46)$$

On a une **correction négative de la fréquence** (attendue, puisque la force attractive s'oppose au mouvement intrinsèque de l'oscillateur) et de l'ordre de 1 Hz à 1 μm.

34. On recopie le tableau en ajoutant les deux lignes utiles pour vérifier l'éq. (45) :

Distance d (μm)	0,55	0,58	0,61	0,68	0,75	0,81	0,875	0,99
Fréquence f (Hz)	122,9	127	130,4	132,6	134,9	135,8	136,6	137,1
$1/d^5$ (μm^{-5})	19,87	15,24	11,84	6,88	4,21	2,87	1,95	1,05
$f_0^2 - f^2$ (Hz^2)	4016	2991	2116	1537	922	678	460	324

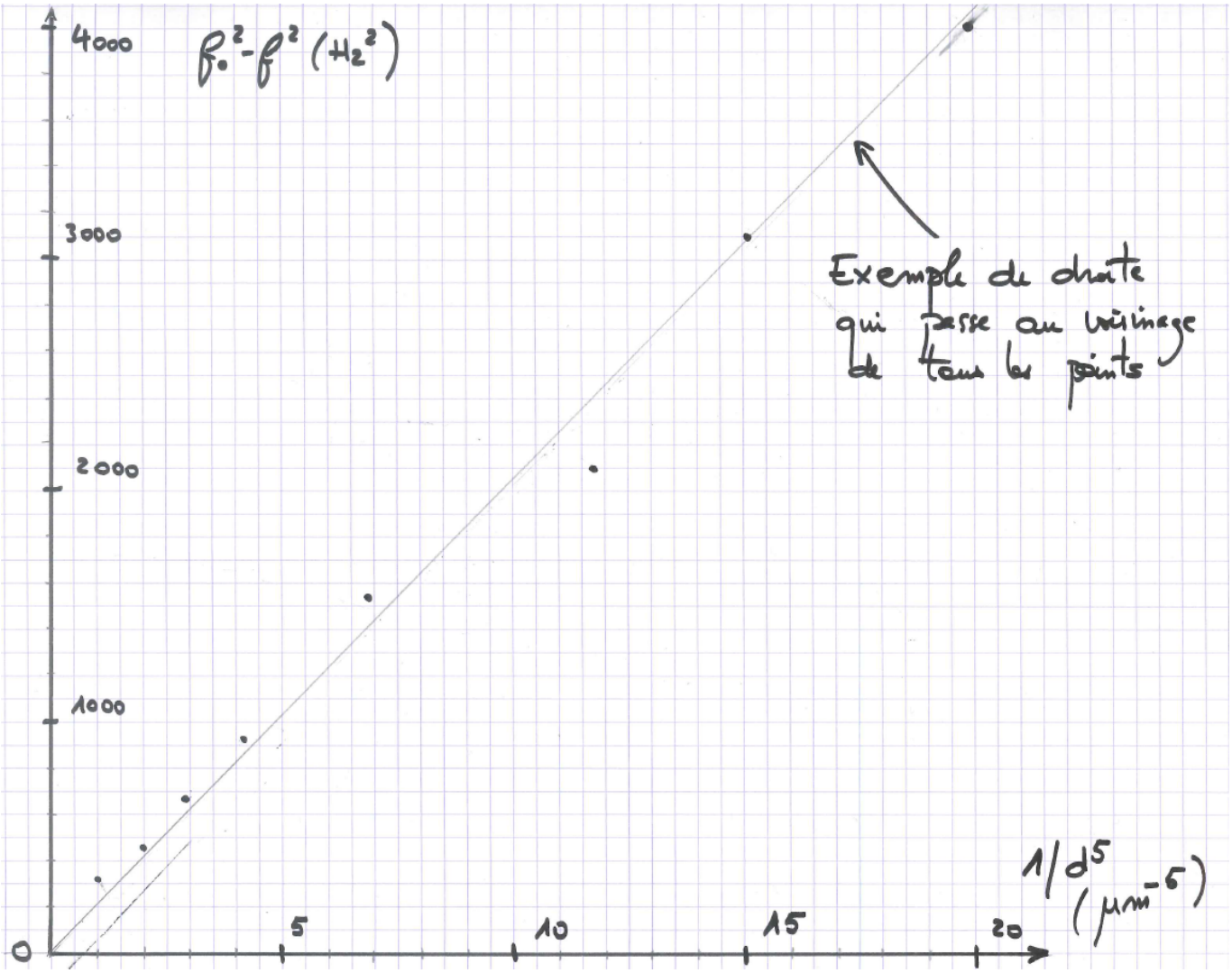


FIGURE 4 – **Résultats expérimentaux sur la force de Casimir.**

L'alignement, même imparfait, des points confirme la loi attendue. On trouve (par exemple avec le point correspondant à 0,55 μm) une droite de coefficient directeur :

$$K \simeq 2,0 \times 10^{-28}\,\mathrm{Hz}^2.\mathrm{m}^5. \tag{47}$$

L'article donne effectivement une valeur $K = (2{,}34 \pm 0{,}34) \times 10^{-28}\,\mathrm{Hz}^2.\mathrm{m}^5$.

35. Il faudrait avoir les barres d'erreur (sur les 2 axes) associées aux mesures pour comprendre si les écarts entre les points et la droite (idéalement, un ajustement linéaire en tenant compte des barres d'erreur) peut s'expliquer par ces barres d'erreur.

36. L'amortissement de l'oscillateur élargit la courbe de résonance de l'oscillateur et va entraîner une incertitude (barre d'erreur verticale sur la courbe précédente) sur la mesure de sa fréquence de résonance.

37. Deux problèmes sont signalés dans cet extrait :
    - **le parallélisme entre les plaques**

      Avec des plaques de l'ordre d'1 cm de côté, il faut un parallélisme de l'ordre de 10^{-5} ou mieux pour avoir une variation ($\simeq 10^{-5} \times 10^{-2} \simeq 10^{-7}$ m) négligeable devant $d \simeq 10^{-6}$ m.

      "*The two surfaces* **must be kept parallel** *even at the smallest gaps investigated.*"
    - **la charge électrique des plaques**

      Il faut éviter que les plaques soient chargées.

      "*Also, due to the presence of different metals in the electrical circuit connecting the two surfaces,* **an offset voltage V_0 is always present in the gap**, *even when the two surfaces are nominally short circuited.*"

      Si c'est le cas, la force électrostatique a tendance à les faire se coller.

      "*This voltage prevents the possibility to obtain small gap separations because* **the electrostatic force will cause the resonator to attach to the source.**"

      Si on arrive à minimiser la différence de potentiel entre les plaques, la loi d'échelle en $1/d^4$ l'emporte nettement sur la force électrostatique en $1/d$ (dans cette géométrie) à faible distance.

      "*For these reasons the measuring process can be divided into three stages : parallelization of the gap between the two surfaces, on-line estimate of the offset voltage V_0, and calibration with electrostatic fields, including one canceling the effect of V_0 at leading order. This last stage allows one to reach the small separations ($\simeq 1\,\mu m$) at which* **the Casimir force, thanks to its favorable scaling, is expected to dominate over the residual electrostatic force.**"

III-B Détection interférométrique du mouvement

38. À quel effet est associé le signe des coefficients de réflexion ?

39. C'est un **interféromètre de Michelson**, inventé par Michelson et amélioré par Michelson et Morley à la fin du 19ème siècle pour tester l'hypothèse de l'ether.
Une application récente (depuis 2015) dont on a beaucoup parlé est **la détection des ondes gravitationnelles**, avec des interféromètres de Michelson avec des bras de 3 ou 4 km (interféromètres **Advanced Virgo** en Italie et **Advanced LIGO** aux États-Unis).

40. On a une **interférence à 2 ondes**. Le déphasage géométrique entre les deux bras est $\phi = \ell_2 + x - \ell_1$, auquel il faut ajouter le déphasage π associé au signe de la réfléxion du chemin **1** sur la lame séparatrice. L'amplitude complexe totale est alors :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathrm{e}^{i(\phi_1+\pi)} + \mathcal{A}_2 \mathrm{e}^{i\phi_2}, \tag{48}$$

où $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont les amplitudes complexes dans les deux bras après traversée de la lame séparatrice et ϕ_1 et ϕ_2 les **déphasages sur un aller-retour** dans chacun des bras (auquel on a ajouté un déphasage de π pour le bras 1, pour tenir compte du déphasage dû à la réflexion). Pour une lame semi-réfléchissante, on a bien sûr $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2 \simeq \mathcal{A}_0/2$ (2 multiplications successives par $1/\sqrt{2}$ lors de la transmission/réflexion ou de la réflexion/transmission) où $\mathcal{A}_0$ est l'amplitude du champ issu du laser. La puissance est donc de la forme :

$$\begin{aligned} P &= |\mathcal{A}_1 \mathrm{e}^{i(\phi_1+\pi)} + \mathcal{A}_2 \mathrm{e}^{i\phi_2}|^2 && (49)\\ P &= (-\mathcal{A}_1 \mathrm{e}^{i\phi_1} + \mathcal{A}_2 \mathrm{e}^{i\phi_2})(-\mathcal{A}_1^\star \mathrm{e}^{-i\phi_1} + \mathcal{A}_2^\star \mathrm{e}^{-i\phi_2}) && (50)\\ P &= |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 - 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cos\phi && (51) \end{aligned}$$

en faisant apparaître les **termes directs** et les **termes d'interférences** entre les deux bras. On a supposé ici (comme l'énoncé nous invite à le faire) que les deux amplitudes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont la même phase (et on les a pris réels pour simplifier les notations), mais on peut toujours englober un déphasage supplémentaire dans l'expression de ϕ si besoin. Les différents déphasages ont pour expression :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{4\pi\ell_1}{\lambda} \text{ et } \phi_2 = \frac{4\pi(\ell_2+x)}{\lambda} && (52)\\ \Longrightarrow \phi &= \frac{4\pi(\ell_2-\ell_1+x)}{\lambda} = \phi_0 + \frac{4\pi x}{\lambda} && (53) \end{aligned}$$

Finalement, la puissance détectée dans le port de sortie de l'interféromètre s'écrit :

$$\begin{aligned} P &= \frac{P_0}{2}(1 - C\cos\phi) && (54)\\ \text{avec } P_0 &= |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 && (55)\\ C &= \frac{2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}{|\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2}. && (56) \end{aligned}$$

Dans le cas idéal où la lame est parfaitement 50/50, on a bien $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ et $C = 1$.

41. On peut mesurer la valeur du contracte C en remarquant que :

$$C = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} = \frac{P(\phi=\pi) - P(\phi=0)}{P(\phi=\pi) + P(\phi=0)}. \tag{57}$$

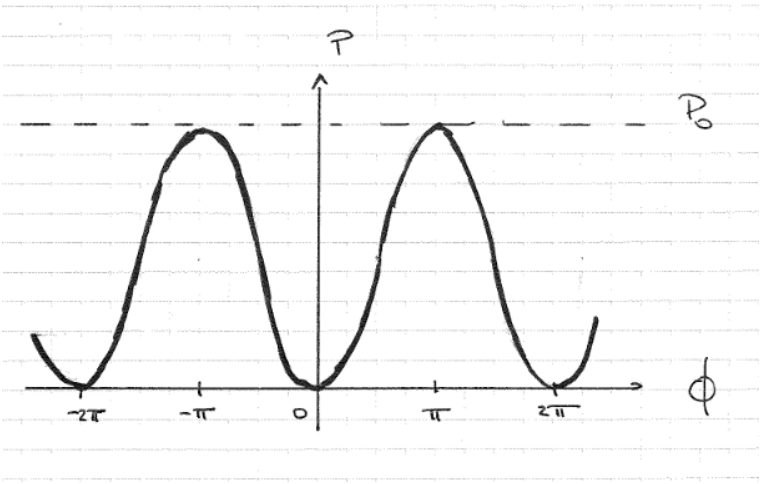


FIGURE 5 – **Variations de P en fonction de ϕ.**

Le contraste est notamment maximal ($C = 1$) quand la puissance détectée dans la frange sombre ($P_{\min}$) s'annule. C'est le cas si la séparatrice est parfaitement 50/50 et qu'il n'y a pas de pertes optiques sur les deux chemins.

On prend $C = 1$ dans la suite.

42. La figure 5 présente les variations de P en fonction de ϕ.

43. Si on règle l'interféromètre sur un déphasage moyen ϕ_0 (à travers la différence de longueur des bras) qui ne correspond pas à un extrémum de $P(\phi)$, les variations $x(t) \ll \lambda$ vont entraîner une variation $\delta P(t) \propto x(t)$:

$$P = \frac{P_0}{2}\left(1 - \cos\left(\phi_0 + \frac{4\pi x}{\lambda}\right)\right) \tag{58}$$

$$P \simeq \frac{P_0}{2}(1 - \cos\phi_0) + \frac{P_0}{2}\sin\phi_0 \frac{4\pi x}{\lambda}. \tag{59}$$

La lecture de la tension de sortie de l'ALI va donc permettre de mesurer $x(t)$.

44. À P_0 et ϕ_0 fixés, le déplacement $x(t)$ induit une variation $\propto x(t)$ de la puissance et donc du courant i délivré par la photodiode, à laquelle il faut ajouter l'effet de possibles fluctuations δP_0 de la puissance du laser. Pour cela, on rajoute dans l'équation (59) l'effet des fluctuations de puissance et on la linéarise (i.e. on ne garde que les termes de fluctuations au premier ordre : par exemple, on ne garde pas le terme en $\delta P_0\, x$). En appliquant la loi des noeuds à l'entrée $-$ de l'ALI (qui est à la masse), et en tenant compte enfin du courant de l'entrée inverseuse $\delta i_{\rm a}$ de l'ALI, on a :

$$\frac{U(t)}{R_c} = \eta P(t) + \delta i_a \tag{60}$$

$$U(t) = R_c\left(\delta i_a(t) + \eta\frac{P_0 + \delta P_0}{2}(1 - \cos\phi_0) + \eta\frac{4\pi}{\lambda}\frac{P_0}{2}\sin\phi_0\, x(t)\right) \tag{61}$$

$$\delta U(t) = R_c\left(\delta i_a(t) + \eta\frac{\delta P_0}{2}(1 - \cos\phi_0) + \eta\frac{4\pi}{\lambda}\frac{P_0}{2}\sin\phi_0\, x(t)\right) \tag{62}$$

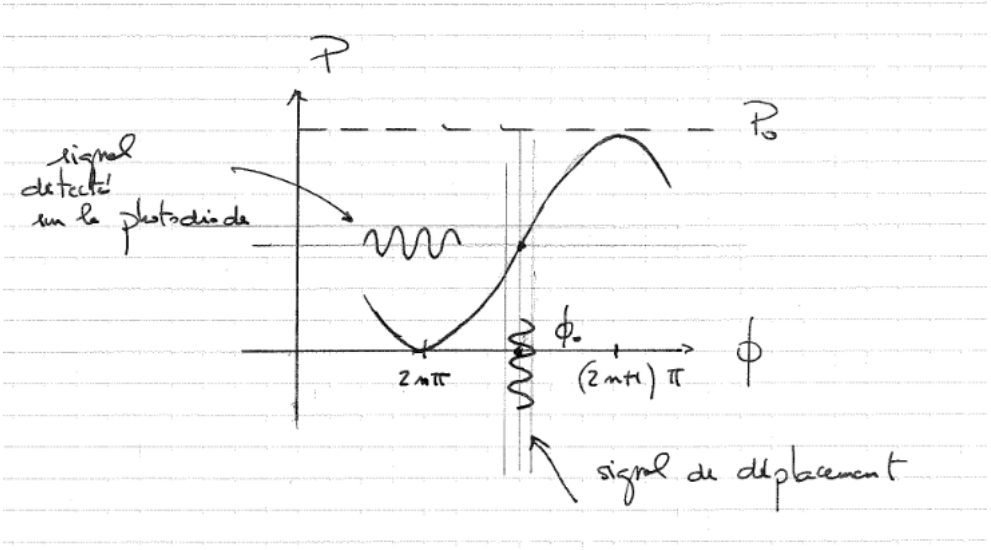


FIGURE 6 – **Principe de la mesure interférométrique d'un déplacement.** En réglant l'interféromètre à une valeur de ϕ_0 pour laquelle la dérivée de $P(\phi)$ est non-nulle, toute variation de déplacement x entraîne une variation de la puissance limneuse à la sortie de l'interféromètre, qui peut être lue par une photodiode.

Le premier terme correspond au **bruit de courant** de l'ALI, qui crée des fluctuations de la tension de sortie en circulant dans la résistance de charge. Le second terme correspond aux **fluctuations de la puissance du laser**. Enfin, le troisième et dernier terme est le **signal de déplacement** que l'on veut mesurer.

45. Si δi_a est le bruit prédominant, comme celui-ci ne dépend pas de réglage de l'interféromètre, on est amené à augmenter le signal. Il faut donc maximiser $|\sin\phi_0|$, donc être à mi-pente de la courbe $P(\phi)$. On doit donc choisir ℓ_1 et ℓ_2 de façon à avoir $\phi_0 = (k+\frac{1}{2})\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Par contre, si c'est le bruit de puissance du laser qui domine, le signal $\propto x(t)$ comme le bruit $\propto \delta P_0$ dépendent tous les deux de ϕ_0. Il faut donc **optimiser le rapport signal-à-bruit** SNR (*Signal to Noise Ratio*) :

$$\mathrm{SNR} = \left|\frac{(...)}{(...)}\frac{\sin\phi_0}{1-\cos\phi_0}\right| = (...)\left|\mathrm{cotan}\frac{\phi_0}{2}\right|. \tag{63}$$

Il faut donc être au **voisinage de la frange sombre** (où P est minimale) :

$$\frac{\phi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}. \tag{64}$$

Cela peut paraître étonnant : dans ce cas, on a intérêt à minimiser le signal ! Ce qui compte en effet, **ce n'est pas tant le signal que le rapport signal-à-bruit**. À la fois le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, mais c'est le bruit qui tend vers 0 la plus vite : ses variations (celles du cos) sont **quadratiques au voisinage de 0** ($1-\cos x \simeq 1-x^2/2$), alors que celles du signal (celles du sin) sont **linéaires** ($\sin x \simeq x$). Évidemment, quand $\phi_0 \longrightarrow 0$, le bruit dû à δi_a finit forcément par devenir prédominant : on se règle donc **près** de $\phi_0 = 0$, **mais pas exactement à** $\phi_0 = 0\,[2\pi]$.

46. Si on est limité par δP_0, on trouve une sensibilité (définie comme l'amplitude Δx qui correspond au signal qui a le même effet en valeur typique sur le signal expérimental détecté que le bruit) en comparant les deux termes :

$$\eta \frac{\Delta P_0}{2} 2\sin^2\frac{\phi_0}{2} \quad \text{et} \quad \eta \frac{P_0}{2}\frac{4\pi}{\lambda} 2\sin\frac{\phi_0}{2}\cos\frac{\phi_0}{2}\Delta x \tag{65}$$

$$\Longrightarrow \Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\Delta P_0}{P_0}\left|\tan\frac{\phi_0}{2}\right|. \tag{66}$$

On trouve une sensibilité $\Delta x_{\min}$ qui s'exprime comme le produit d'une échelle de longueur (sans surprise, la longueur d'onde λ, qui fixe l'échelle de déplacement sur laquelle la phase varie) par l'échelle du bruit relatif et par un facteur lié au choix du point de fonctionnement.

Rappelons qu'une meilleure sensibilité correspond à un nombre plus petit.

47. Si on est limité par le courant de fuite de l'amplificateur opérationnel, il faut comparer :

$$\eta \frac{4\pi}{\lambda}\frac{P_0}{2}\sin\phi_0\, x(t) \text{ et } \delta i_a \tag{67}$$

$$\Longrightarrow \Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\eta}\frac{1}{P_0}\Delta i_a \frac{1}{|\sin\phi_0|}. \tag{68}$$

De la même façon, ici, la sensibilité $\Delta x_{\min}$ fait apparaître au dénominateur le rendement η de la photodiode (moins la photodiode est sensible, moins la sensibilité est bonne, ce qui fait remonter $\Delta x_{\min}$) et la puissance lumineuse (plus cette puissance est faible, plus on est sensible au courant δi_a).

IV Mesures mécaniques avec un nanotube de carbone

48. En faisant un dessin de la maille hexagonale, on voit qu'on a 6 atomes de C, mais que chacun est partagé entre 3 hexagones. On a donc :

$$M = \frac{\pi a L}{A} \times 2 \times 12 \times m_a \tag{69}$$

$$M \simeq \frac{3 \times 2.10^{-9} \times 4.10^{-6} \times 2 \times 12 \times 1,6.10^{-27}}{5.10^{-20}} \tag{70}$$

$$M \simeq 2.10^{-20}\,\text{kg}. \tag{71}$$

L'article mentionne lui $10^{-20}\,$kg, mais c'est parce que c'est la masse effective du mode vibrant, qui dépend du profil de vibration.

49. Il y deux résonances très proches car il y a deux directions de vibration possibles pour les ondes transverses : c'est l'équivalent de la polarisation de la lumière. La dégénérescence entre les deux modes est levée par les défauts du nanotube, qui fait que les deux axes ne sont pas strictement équivalents.

IV-A Mesure de force

50. Le pic élargi représente la transformée de Fourier du mouvement dessiné à la question 29 : des oscillations à f_0, élargies avec $\Delta f \simeq 0,2\,\text{kHz}$ (largeur totale à mi-hauteur, estimée directement sur la figure de l'énoncé). Cela correspond à un facteur mécanique :

$$Q \simeq \frac{4,2.10^6}{0,2.10^3} \simeq 20\,000, \tag{72}$$

qui est bien le chiffre donnée dans l'article.

A celà s'ajoute le pic lié à l'excitation par la force monochromatique.

51. Le pic large peut masquer le pic fin. La réponse mécanique à résonance est en $Q/M\Omega_0^2$, à comparer au pic thermique qui dépend de T. On peut donc jouer sur Q (le plus grand possible) et T (la plus faible possible) pour améliorer la sensibilité (i.e. mesurer la force la plus petite possible).

Si on est limité par la sensibilité de la mesure de position (qui n'est pas effectuée interférométriquement ici), on peut aussi jouer sur la masse ou la fréquence f_0 pour diminuer la raideur de l'oscillateur et donc augmenter le déplacement associé pour uen amplitude de force excitatrice donnée.

IV-B Mesure de masse avec un nanotube

52. En appliquant la même formule qu'à la section précédente, on trouve $M = 6,4.10^{-22}\,\text{kg}$ et une incertitude relative $\Delta M/M$:

$$\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2} \simeq 20\,\% \tag{73}$$

puisque les deux erreurs ne sont pas corrélées. On peut donc considérer au final qu'on a une masse :

$$M = (6.0 \pm 1).10^{-22}\,\text{kg}. \tag{74}$$

Là-encore, la masse mentionnée dans l'article est la moitié de cette valeur (voir la question 54).

53. Si une molécule (de masse δM) se dépose sur l'oscillateur, il en modifie la masse : on s'attend donc à ce qu'il en diminue la fréquence de résonance mécanique. On a en effet :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+\delta M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}\left(1+\frac{\delta M}{M}\right)^{-1/2} \tag{75}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta f}{f_0} \simeq -\frac{\delta M}{2M}. \tag{76}$$

La sensibilité de l'expérience est évidemment liée à la masse très faible du nanotube (de l'ordre du millier de celle de la molécule qui se dépose) et à sa très haute fréquence de résonance, qui augmente le **décalage absolu** de la fréquence de résonance. Pour une molécule de naphtalène $C_{10}H_8$, on a une masse ajoutée :

$$\delta M \simeq (10\times 12+8)\times 1,6.10^{-27}\,\text{kg} \simeq 2.10^{-25}\,\text{kg} \tag{77}$$

$$\Longrightarrow |\Delta f| \simeq 2.10^9 \times \frac{2.10^{-25}}{2\times 6.10^{-22}} \simeq 3.10^5\,\text{Hz}. \tag{78}$$

Les variations observées (**négatives et de l'ordre de quelques centaines de kHz**) sont bien de cet ordre de grandeur.

54. Le calcul effectué ci-dessus suppose que la molécule qui se dépose augmente la masse mise en mouvement, mais ce n'est pas vrai **pour les molécules localisées au voisinage d'un noeud de vibration** : la masse en mouvement n'est pas modifiée (ou très peu) et on s'attend dans ce cas à $\Delta f \simeq 0$.

    C'est ce qui est explicité sur l'insert : la variation de fréquence est maximale si la molécule se dépose au centre (qui est un ventre du mode) et minimale aux extrémités (où est fixé le nanotube, et qui sont donc des noeuds et les seuls noeuds pour le mode fondamental de vibration).

    Au passage, on voit que la valeur maximale est de l'ordre de 600 kHz, soit deux fois plus que l'estimation réalisée à la question 53. C'est dû au fait qu'en calculant la masse, il faut tenir compte du profil de vibration qui varie le long du nanotube. L'énergie cinétique étant en $u(z)^2 = \sin^2(...)$, l'expression exacte fait intervenir $\int u(z)^2 dz = L/2$ au lieu de $\int dz = L$. La masse M à prendre en compte (si la molécule se dépose au centre) est donc deux fois plus faible, et le décalage de fréquence doublé.

55. Si on fait des mesures similaires sur d'autres modes u_n du nanotube, on va mesurer $|\Delta f_n| \propto |u_n(z_m)|^2$ où z_m est la cote où se dépose la molécule. En recoupant différentes informations, on peut en déduire z_m et donc δM indépendamment de cette cote.

    Par exemple, si la résonance à 4 GHz a une variation de fréquence négligeable devant celle du mode à 2 GHz, on peut en déduire que la molécule s'est déposée au centre du nanotube (qui est le seul noeud du mode à 4 GHz qui n'est pas également un noeud du mode à 2 GHz). La molécule est donc sur le (seul) ventre du mode fondamental et la mesure de Δf donne directement accès à δM.

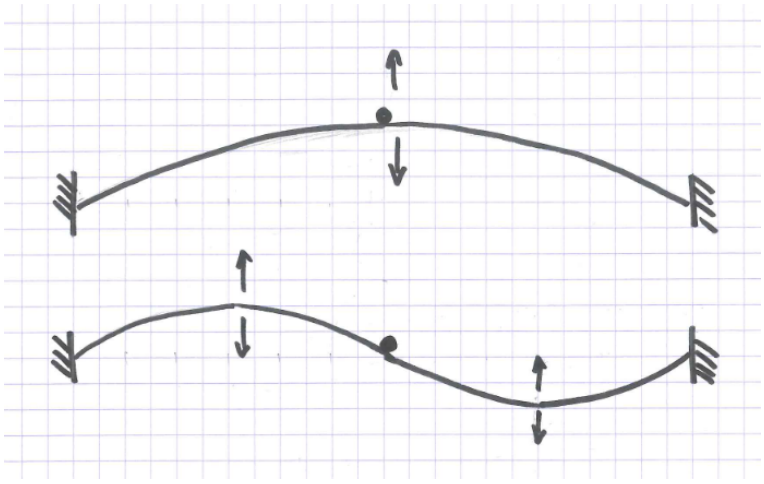


FIGURE 7 – **Effet sur deux modes de vibration d'une molécule déposée.** La molécule déposée au centre a un déplacement maximal, et donc un effet maximal sur la fréquence du mode fondamental de vibration. A l'inverse, la molécule n'est pas déplacée par le premier mode excité et ne modifie donc pas sa fréquence de résonance.

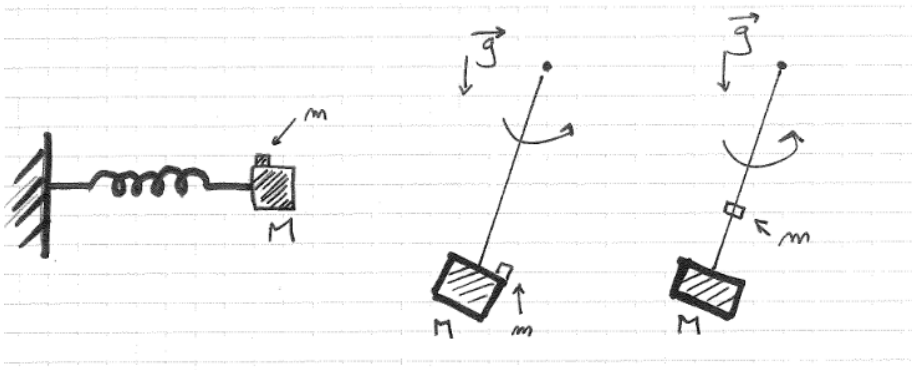


FIGURE 8 – **Expériences permettant d'illustrer la mesure de masse à travers le décalage en fréquence de la résonance d'un oscillateur.** À gauche et au centre, la masse additionnelle m est localisée au même endroit que la msse M de l'oscillateur. Elle a donc un effet maximal sur la fréquence de résonance. À droite, la masse m est déposée plus près de l'axe de rotation : elle a donc un effet plus faible sur le moment d'inertie du pendule pesant et donc sur sa fréquence d'oscillation.

56. On peut illustrer cet effet en ajoutant une masse $\delta M \ll M$ à la masse M reliée à un ressort : la fréquence d'oscillation est bien modifiée selon la loi (76). Si on veut illustrer l'importance de la prise en compte du profil de vibration, on peut le faire avec un pendule pesant : selon sa position sur l'axe rigide du pendule, une masse δM aura un effet plus ou moins important sur le moment d'inertie du pendule et donc sur sa fréquence d'oscillation.

57. On voit sur la figure 9 que même entre deux sauts, la fréquence mesurée fluctue. Ces variations (de l'ordre de $\pm$ 50 kHz, on ne cherche pas ici à les expliquer) vont limiter la sensiblité de cette mesure de fréquence, c'est-à-dire la plus petite masse que l'on peut espérer distinguer (à travers le saut de fréquence associé) au milieu du bruit expérimental. La masse associée est alors :

$$\Delta m_{\min} \simeq 2 \times 3.10^{-22} \times \frac{50.10^3}{2.10^9} \simeq 2.10^{-26}\,\mathrm{kg}. \tag{79}$$

58. La durée typique entre deux sauts est de l'ordre de 1 s, avec typiquement une centaine de points de mesures réalisés dans l'intervalle. Avec une centaine de mesures indépendantes, on peut espérer réaliser une estimation 10 ($= \sqrt{100}$) fois meilleure qu'avec une seule mesure. La sensiblité réelle de l'expérience est donc bien 10 fois inférieure au chiffre obtenu à la question précédente.

59. On trouve finalement

$$\delta m_{\min} \simeq \Delta m_{\min}/10 \simeq 2.10^{-27}\,\mathrm{kg} = 2\,\mathrm{yg}, \tag{80}$$

d'où le titre de l'article. Ce résultat est de l'ordre de grandeur de l'unité de masse atomique (rappelée en préambule de l'énoncé), soit la masse d'un nucléon.