

Partie à dominante physique : l'effet Casimir

L'effet Casimir, prédit théoriquement en 1948 par le physicien Hendrik Casimir, stipule l'existence d'une force entre deux miroirs plans parallèles parfaitement réfléchissants placés dans le vide, non chargés et à température nulle.

La force de Casimir provient des fluctuations de l'énergie du vide (encore appelée énergie du point zéro). Les longueurs d'onde des fluctuations engendrées par l'énergie du point zéro n'ont pas les mêmes valeurs en l'absence et en présence de la cavité. Cette différence des modes de fluctuations engendre une différence de densité volumique d'énergie et donc une différence de pression de radiation à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité à l'origine de la force « issue du vide » entre les deux miroirs.

Le sujet ci-dessous traite de la force de Casimir, de l'obtention de son expression et de sa mise en évidence expérimentale. **Les différentes parties et sous-parties de ce sujet sont largement indépendantes.**

Pour les applications numériques on prendra :

Constante de Planck	$h = 2\pi\hbar = 6,626\,07 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,380\,65 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,022\,14 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602\,18 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	$m_e = 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854\,19 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 12,57 \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Accélération de la pesanteur terrestre	$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$

Formulaire et notations :

- dans l'ensemble du sujet $i \in \mathbb{C}$ désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes autres que i sont soulignées ;
- on donne le résultat de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$;
- le développement limité de $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 3 au voisinage de $x=0$ est le suivant :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3).$$

- dans l'ensemble du problème le point M représente la variable spatiale qui est repérée par rapport à un repère d'espace d'origine O par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) : la base orthonormée directe associée est notée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, elle est représentée sur la figure 1, et le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$;
- dans la base cartésienne les opérateurs divergence $\text{div}(\vec{A})$, rotationnel $\text{rot}(\vec{A})$ et laplacien vectoriel $\vec{\Delta}(\vec{A})$ ont les expressions suivantes :

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \Delta(A_x)\vec{u}_x + \Delta(A_y)\vec{u}_y + \Delta(A_z)\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \Delta(A_x) = \text{div}(\vec{\text{grad}}(A_x)) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}.$$

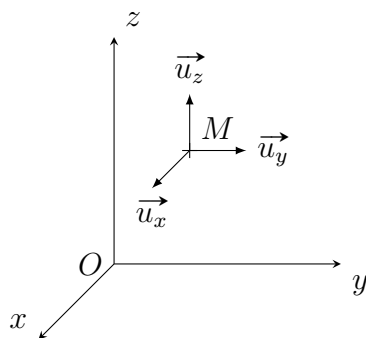


FIGURE 1 – Base cartésienne.

- on rappelle la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \vec{\Delta}(\vec{A})$;
- on rappelle les relations de passage qui donnent la discontinuité spatiale du champ électrique et du champ magnétique au niveau d'une interface entre deux milieux sur laquelle existe une densité surfacique de charge, notée σ , et une distribution de courant de surface, notée \vec{j}_S :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2};$$

où $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface dirigé du côté 1 vers le côté 2. \vec{E}_1 et \vec{B}_1 (respectivement \vec{E}_2 et \vec{B}_2) sont les champs au niveau de l'interface du côté 1 (respectivement du côté 2).

I. Ordre de grandeur

Pour commencer, nous allons obtenir l'expression de la force de Casimir par analyse dimensionnelle puis évaluer son ordre de grandeur.

La force de Casimir exercée par le miroir M_1 sur un élément de surface $S = L^2$ du miroir M_2 représentés sur le schéma de la figure 2 est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{F}_C = -\frac{\pi^2 \hbar^p c^q a^r S}{240} \vec{u}_z; \quad (1)$$

où $a \ll \sqrt{S}$ est la distance entre les deux miroirs. L'axe (Oz) est perpendiculaire aux deux miroirs, l'origine de l'axe étant pris sur le miroir M_1 . p , q et r sont des nombres entiers. Pour l'ensemble des calculs d'électromagnétisme abordés dans la suite, les deux miroirs seront considérés infinis.

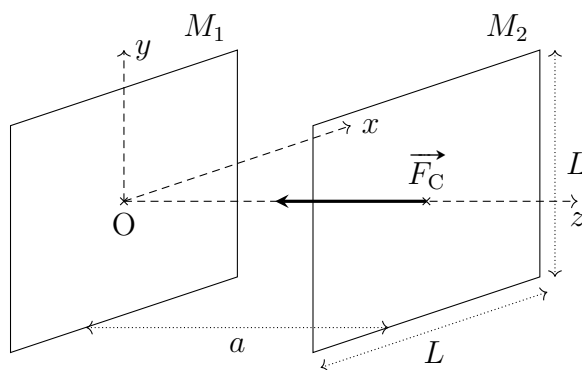


FIGURE 2 – Force de Casimir qui s'exerce entre deux plans parallèles parfaitement conducteurs (la figure n'est pas à l'échelle).

1. Obtenir par analyse dimensionnelle les valeurs numériques de p , q et r qui interviennent dans l'expression de la force Casimir \vec{F}_C .

Corrigé : Une force s'exprime en N soit kg m s^{-2} . La constante de Planck réduite est une énergie multipliée par un temps et s'exprime en $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, la vitesse de la lumière s'exprime en m s^{-1} , la surface S en m^2 et a la distance en m.

Les équations aux dimensions donnent donc :

$$\begin{cases} p = 1 \\ 2p + q + r + 2 = 1 \\ -p - q = -2; \end{cases}$$

soit $p = 1$, $q = 1$ et $r = -4$, ce qui donne l'expression suivante de la force de Casimir :

$$\vec{F}_C = -\frac{\pi^2 \hbar c S}{240 a^4} \vec{u}_z.$$

2. Calculer numériquement la force de Casimir qui s'exerce entre deux miroirs plans de surface $S = 1,0 \text{ cm}^2$, distants de $a = 100 \text{ nm}$. La force de Casimir est-elle attractive ou répulsive? Calculer numériquement la différence de pression correspondante notée ΔP_{cas} qui s'exerce sur l'une des plaques.

Corrigé : L'application numérique donne $\|\vec{F}_C\| = 1,300 \text{ mN}$ avec les valeurs numériques de l'énoncé. Par ailleurs la force exercée par le miroir (M_1) sur le miroir (M_2) est dirigée selon $-\vec{u}_z$ donc la force de Casimir est attractive.

La différence de pression correspondantes (différence de pression entre l'extérieur de la cavité et l'intérieur de la cavité) est égale à :

$$\Delta P_{\text{cas}} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} = 13,00 \text{ Pa.}$$

3. Quel est le rayon d'une gouttelette d'eau dont le poids a la même intensité que la force de Casimir calculée dans la question précédente?

Corrigé :

Le poids d'une goutte d'eau a pour expression $\frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho \vec{g}$ en supposant que l'on soit à la surface de la Terre et avec $\rho = 1,000 \text{ kg m}^{-3}$. On en déduit :

$$R_e = \sqrt[3]{\frac{3\|\vec{F}_C\|}{4\pi\rho g}} = 3,163 \text{ mm.}$$

II. Comportement électromagnétique des métaux et pression de radiation

Le calcul théorique de la force de Casimir fait intervenir les modes propres d'une cavité formée par deux plans conducteurs parfaits parallèles. Les ondes électromagnétiques réfléchies sur un tel conducteur font apparaître une force surfacique que l'on assimile à la pression de radiation.

Dans cette partie nous allons nous intéresser au comportement électromagnétique des métaux pour différents modèles : modèle du conducteur parfait et modèle du conducteur de conductivité finie dans différents domaines de longueurs d'onde et de pulsations. Les objectifs de cette partie sont multiples :

- obtenir l'expression de la pulsation plasma, qui est caractéristique du comportement électromagnétique du métal et qui intervient dans les corrections pour la mesure de la force Casimir ;
- obtenir l'expression de la pression de radiation ;
- obtenir les modes propres d'une cavité formée par deux conducteurs plans parfaits parallèles ;
- comprendre le comportement des métaux dans différents domaines de pulsations (ou de longueurs d'onde).

II.1. La pulsation plasma des métaux : oscillations collectives des électrons libres

Pour déterminer l'expression de la pulsation plasma notée ω_p on utilise le modèle simplifié suivant. Initialement le métal est neutre, immobile et localisé entre les abscisses $x = -\frac{L_0}{2}$ et $x = \frac{L_0}{2}$. On suppose que les dimensions du métal sont illimitées dans les directions de l'axe (Oy) et (Oz) (on néglige les effets de bords).

On note n_e la densité particulière des électrons libres de masse m_e et de charge $q_e = -e$.

Suite à une perturbation, les électrons libres se déplacent en un seul bloc centré sur l'abscisse $X_e(t)$ comme schématisé sur la figure 3.

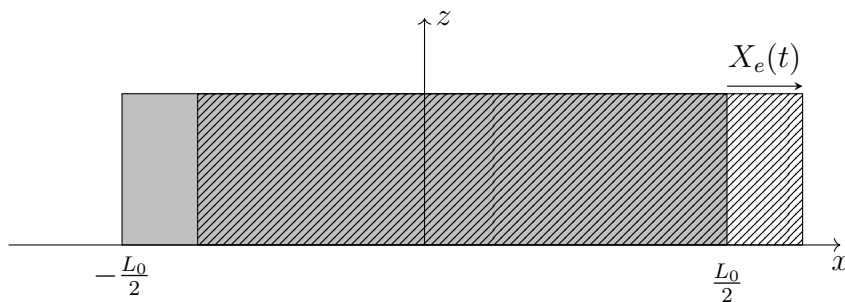


FIGURE 3 – Représentation schématique du déplacement du nuage d'électrons libres.

- Obtenir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(x)$ à un instant de date t .

Corrigé : La zone située entre $-\frac{L_0}{2}$ et $-\frac{L_0}{2} + X_e(t)$ est chargée positivement, correspondant à la présence des cations métalliques. La zone située entre $\frac{L_0}{2}$ et $\frac{L_0}{2} + X_e(t)$ est chargée négativement. Entre ces deux zones, le métal est localement neutre soit :

$$\rho(x) = \begin{cases} n_e e & \text{lorsque } -\frac{L_0}{2} < x < -\frac{L_0}{2} + X_e(t) \\ 0 & \text{lorsque } -\frac{L_0}{2} + X_e(t) < x < \frac{L_0}{2} \\ -n_e e & \text{lorsque } \frac{L_0}{2} < x < \frac{L_0}{2} + X_e(t) \end{cases}$$

On suppose qu'en dehors de la zone $-\frac{L_0}{2} < x < \frac{L_0}{2} + X_e(t)$ l'espace est vide de charge donc $\rho(x) = 0 \text{ C m}^{-3}$.

- Déterminer les variables et la direction du champ électrique \vec{E}_p engendré par la distribution de charge précédente. Obtenir l'expression du champ électrique en tout point de l'espace et tracer l'évolution de sa composante non nulle en fonction de x .

Corrigé : Tous les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrique a donc une seule composante selon \vec{u}_x soit $\vec{E}_p(M, t) = E_p(M, t)\vec{u}_x$.

Il y a invariance de la distribution de charges par translation selon les directions des axes (Oy) et (Oz), le champ électrique possède les mêmes invariances, on en déduit $\vec{E}_p = E_p(x, t)\vec{u}_x$. On remarque que les deux couches chargées avec des charges opposées forment un modèle de condensateur plan, elles sont en influence totale et le champ électrique à l'extérieur de la zone métallique (zone vide) est nul.

On peut obtenir le champ électrique dans la zone métallique à l'aide du théorème de Gauss ou l'équation de Maxwell-Gauss. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\text{div}(\vec{E}_p) = \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0};$$

ce qui donne l'expression suivante du champ électrique (à des fonctions du temps près) :

$$E_p(x, t) = \begin{cases} \frac{n_e e x}{\varepsilon_0} + a(t) & \text{lorsque } -\frac{L_0}{2} < x < -\frac{L_0}{2} + X_e(t) \\ b(t) & \text{lorsque } -\frac{L_0}{2} + X_e(t) < x < \frac{L_0}{2} \\ -\frac{n_e e x}{\varepsilon_0} + c(t) & \text{lorsque } \frac{L_0}{2} < x < \frac{L_0}{2} + X_e(t); \end{cases}$$

les trois fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont déterminées à l'aide des conditions aux limites : $E_p(x = -\frac{L_0}{2}) = 0$, $E_p(x = \frac{L_0}{2} + X_e(t)) = 0$ et on vérifie la continuité du champ électrique en $x = \frac{L_0}{2}$ et en $x = -\frac{L_0}{2} + X_e$.

Le champ électrique engendré par la translation du nuage électronique a pour expression :

$$\vec{E}_p(x, t) = \begin{cases} \frac{n_e e}{\varepsilon_0} (x + \frac{L_0}{2}) \vec{u}_x & \text{lorsque } -\frac{L_0}{2} \leq x \leq -\frac{L_0}{2} + X_e(t) \\ \frac{n_e e X_e(t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_x & \text{lorsque } -\frac{L_0}{2} + X_e(t) \leq x \leq \frac{L_0}{2} \\ \frac{n_e e}{\varepsilon_0} (X_e(t) - x + \frac{L_0}{2}) \vec{u}_x & \text{lorsque } \frac{L_0}{2} \leq x \leq \frac{L_0}{2} + X_e(t). \end{cases}$$

L'obtention du champ électrique à l'aide du théorème de Gauss se fait comme pour le modèle du condensateur plan : on détermine le champ électrique engendré par chaque couche chargée puis on applique le théorème de superposition.

Le graphe de l'évolution de $E_p(x, t)$ à un instant t tel que $X_e(t) > 0$ est représenté sur la figure 4.

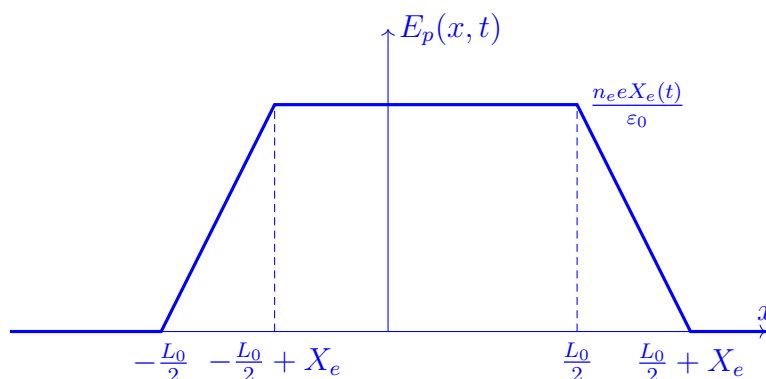


FIGURE 4 – Évolution de la composante $E_p(x, t)$ du champ électrique en fonction de x lorsque $X_e(t) > 0$.

- Écrire l'équation du mouvement du bloc d'électrons libres déplacés en négligeant les forces autres que la force de Lorentz électrique et en supposant $|X_e| \ll L_0$. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_p de ces oscillations collectives.

Corrigé : Le théorème de la résultante cinétique appliqué au bloc d'électrons libres déplacés

(en translation) s'écrit en divisant par le volume du bloc :

$$m_e n_e \frac{d^2 X_e(t)}{dt^2} = -en_e E_p = \frac{-n_e^2 e^2 X_e(t)}{\varepsilon_0};$$

on reconnaît l'équation différentielle vérifiée par un oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$.

7. Calculer numériquement la pulsation plasma ω_p avec une densité particulière en électrons libres $n_e = 1,81 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$ puis la longueur d'onde correspondante λ_p dans le cas de l'aluminium. À quel domaine du spectre des ondes électromagnétiques appartient λ_p ?

Corrigé :

Les applications numériques donnent $\omega_p = 2,40 \times 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ et $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 78,6 \text{ nm}$, ce qui correspond au domaine ultraviolet.

II.2. Modèle du conducteur parfait

Le modèle de Drüde nous donne l'expression du vecteur densité de courant électrique complexe \vec{j} dans un métal conducteur soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω noté \vec{E} :

$$\vec{j} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \vec{E} \quad (2)$$

où $\gamma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$ est la conductivité électrique du métal et $\tau \simeq 10^{-14} \text{ s}$ est la durée moyenne entre deux chocs successifs des électrons libres sur les cations du réseau dans le modèle de Drüde.

Pour des conditions d'excitation non résonnantes ($\omega \neq \omega_p$), la densité volumique de charges est nulle dans le métal : $\rho = 0$. Par ailleurs la permittivité diélectrique relative et la perméabilité magnétique relative du métal sont supposées unitaires : $\mu_r = \varepsilon_r = 1$.

8. Écrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique dans le métal conducteur.

Corrigé : Avec une densité volumique de charges nulle $\rho = 0$ dans le métal conducteur, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0;$$

l'équation de Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson) est toujours vérifiée par le champ magnétique \vec{B} :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0.$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

où le vecteur densité de courant de volume \vec{j} peut être remplacé par l'expression donnée par le modèle de Drüde lorsqu'on se place en régime sinusoïdal forcé.

9. Simplifier l'expression du vecteur densité de courant électrique dans le cas du domaine ohmique où $\omega\tau \ll 1$.

Corrigé : Dans le domaine ohmique, la conductivité électrique devient réelle et le vecteur densité de courant de volume s'écrit : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ (on retrouve la loi d'Ohm locale utilisée communément dans les milieux conducteurs pour des fréquences qui vérifient $\omega\tau \ll 1$).

10. Rappeler l'ordre de grandeur de la conductivité γ_0 d'un métal. Simplifier l'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère dans le domaine ohmique en comparant le vecteur densité de courant électrique et le vecteur densité de courant de déplacement.

Corrigé : Pour le cuivre à température ambiante, la conductivité électrique γ_0 est de l'ordre de $\gamma_0 = 5 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$ (ou en $\text{C}^2 \text{ s kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$).

Le rapport du vecteur densité de courant électrique $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ et du vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ en norme a pour valeur approchée : $\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} \sim \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\omega} 10^{18} \text{ rad s}^{-1} \gg 1$, dans le domaine optique le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction et l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie selon :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}.$$

On considère la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique dont le champ électrique complexe a l'expression suivante :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{i(\omega t - \underline{k}z)}. \quad (3)$$

11. Obtenir la relation de dispersion : relation entre \underline{k} et ω dans le domaine ohmique. En déduire que dans ce domaine une onde électromagnétique se propage avec une longueur caractéristique d'atténuation notée $\delta(\omega)$ appelée épaisseur de peau. Préciser l'expression de $\delta(\omega)$.

Corrigé : Les équations de Maxwell simplifiées dans le domaine ohmique permettent d'obtenir l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique (qui est une équation type équation de diffusion) :

$$\Delta(\vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

En injectant la forme du champ électrique proposé dans l'équation d'onde, on obtient la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega.$$

Les solutions de cette relation de dispersion sont imaginaires, en considérant une direction de propagation dans le sens des z croissant :

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} (1 - i).$$

Le champ électrique réel est de la forme suivante :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \exp^{-\frac{z}{\delta}}.$$

où $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ est la distance caractéristique d'atténuation au cours de la propagation encore appelée « épaisseur de peau ». Au delà de quelques $\delta(\omega)$ l'amplitude du champ électrique est négligeable, l'onde ne se propage pas au delà d'une telle distance.

Dans le modèle du conducteur parfait, on suppose que la conductivité électrique γ_0 du métal tend vers l'infini.

12. Justifier que le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans un milieu conducteur parfait.

Corrigé : Dans un milieu conducteur parfait, l'épaisseur de peau devient nulle, le champ électrique et le champ magnétique sont spatialement atténués sur une distance de quelques δ donc ils ne se propagent pas dans un milieu conducteur parfait. Les champs électrique et magnétique associés à une onde électromagnétique sont nuls dans un milieu conducteur parfait.

II.3. Réflexion sur un milieu conducteur parfait : pression de radiation

On envisage une onde électromagnétique incidente se propageant dans le vide (milieu situé du côté $z < 0$) et qui arrive en incidence normale sur une interface avec un milieu conducteur parfait située en $z = 0$; le champ électrique associé à cette onde est le suivant :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \quad (4)$$

13. Quel est l'état de polarisation de l'onde incidente ? Obtenir l'expression du champ magnétique incident \vec{B}_i associé à l'onde incidente, ainsi que le vecteur de Poynting noté $\vec{\Pi}_i$ associé à l'onde électromagnétique incidente.

Corrigé : La forme du champ électrique associé à l'onde incidente indique une polarisation rectiligne selon \vec{u}_x . Le champ magnétique associé s'obtient par la relation de structure issue de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

Par définition le vecteur de Poynting est égal à :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

Le vecteur de Poynting est colinéaire à la direction de propagation.

14. Proposer, en justifiant, une expression du champ électrique réfléchi noté \vec{E}_r . En déduire les expressions du champ magnétique réfléchi \vec{B}_r et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_r$ associé à l'onde électromagnétique réfléchie.

Corrigé : La réflexion en incidence normale sur le milieu conducteur parfait ne modifie pas la pulsation de l'onde et son état de polarisation. L'onde réfléchie se propage dans le sens des z décroissants. Le champ électrique associé à l'onde réfléchie est de la forme :

$$\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{u}_x.$$

Les relations de passage impose la continuité de la composante tangentielle du champ électrique au niveau de l'interface en $z = 0$ soit un champ électrique total nul en $z = 0$, ce qui donne $E_0 + E_{0r} \cos(\varphi) = 0$. Le champ électrique réfléchi a la même amplitude que le champ électrique incident mais il est en opposition de phase soit :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x.$$

Le champ magnétique réfléchi se déduit de la relation de structure, on obtient :

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y.$$

Et pour le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi}_r = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz) \vec{u}_z.$$

15. Définir et calculer le coefficient de réflexion en puissance sur un milieu conducteur parfait.

Corrigé : Le coefficient de réflexion en puissance noté R est égal au rapport des normes des valeurs moyennes temporelles des vecteurs de Poynting associés aux ondes incidente et réfléchie :

$$R = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} = 1.$$

Dans le cas d'un milieu conducteur parfait, toute la puissance associée à l'onde incidente est réfléchie.

16. Calculer le vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_S qui apparaît au niveau du plan conducteur parfait situé en $z = 0$. En déduire l'expression de la force de Laplace surfacique :

$$\frac{\delta \vec{F}_{\text{Lap}}}{dS} = \vec{j}_S \wedge \vec{B}_i(z = 0, t); \quad (5)$$

qui s'exerce sur le plan conducteur puis la valeur moyenne temporelle $\langle P_{\text{rad}} \rangle$ de la pression, appelée pression de radiation, qui s'exerce sur le plan conducteur.

Corrigé : D'après la relation de passage concernant le champ magnétique au niveau de l'interface en $z = 0$:

$$\vec{j}_S = -\frac{\vec{u}_z \wedge (\vec{B}_i(z = 0, t) + \vec{B}_r(z = 0, t))}{\mu_0} = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x.$$

La force de Laplace surfacique dont l'expression est fournie s'en déduit puis l'expression de la valeur moyenne temporelle de la pression de radiation :

$$\frac{\delta \vec{F}_{\text{Lap}}}{dS} = \underbrace{\frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)}_{P_{\text{rad}}} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \langle P_{\text{rad}} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E_0^2.$$

17. Faire le lien entre la pression de radiation moyenne $\langle P_{\text{rad}} \rangle$ et la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique en $z = 0^-$ notée $\langle u_{\text{em}} \rangle$.

Corrigé : La densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde incidente notée $u_{em,i}$ est égale à :

$$u_{em,i} = \varepsilon_0 \|\vec{E}_i\|^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz).$$

De même on a $u_{em,r} = \varepsilon_0 \|\vec{E}_r\|^2$ pour l'onde réfléchie, on constate en $z = 0$: $u_{em,i} = u_{em,r}$ soit $\langle u_{\text{em}} \rangle = 2\langle u_{em,i} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 = \langle P_{\text{rad}} \rangle$.

La quantification du rayonnement permet d'interpréter la pression de radiation en termes de photons.

18. Donner l'expression de la quantité de mouvement notée \vec{p} associée à un photon du rayonnement électromagnétique incident.

Corrigé : La quantité de mouvement associée à un photon de l'onde incidente est égale à

$$\vec{p} = \hbar \frac{\omega}{c} \vec{u}_z = \frac{h}{\lambda} \vec{u}_z.$$

19. On note n^* la densité particulière en photons. Quel est le lien entre n^* et la densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne $\langle u_{em} \rangle$?

Corrigé : Le nombre total de photons par unité de volume n^* multiplié par l'énergie d'un photon $\hbar\omega$ est égal à la densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne (totale) : $\langle u_{em} \rangle = n^* \hbar\omega$.

20. En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un ensemble de photons à préciser, retrouver l'expression de la pression de radiation $\langle P_{rad} \rangle$ exercée par les photons incidents sur l'interface avec le milieu conducteur parfait.

Corrigé : On considère l'ensemble des photons incidents qui viennent se réfléchir sur une surface dS du milieu conducteur parfait entre deux instants très proches t et $t + dt$, ceux-ci sont situés dans un volume $dV = cdSdt$ car les photons se déplacent vers l'interface à la vitesse de la lumière c . Le nombre de photons incidents concernés est donc égal à $n_i^* cdt dS$ où n_i^* la densité particulière photonique liée à l'onde incidente.

Après réflexion les photons repartent avec une quantité de mouvement $-\vec{p}$ opposée à la quantité de mouvement des photons incidents. La variation de quantité de mouvement de cet ensemble de photons est donc égale à :

$$-2n_i^* dV \vec{p} = \vec{F}_{interface \rightarrow photons} dt = -\langle P_{rad} \rangle dS dt \vec{u}_z$$

On en déduit l'expression de la pression de radiation :

$$\langle P_{rad} \rangle = 2n_i^* \hbar\omega = 2\langle u_{em,i} \rangle = \langle u_{em} \rangle.$$

On retrouve la même expression que celle obtenue à la question 17.

II.4. Champ électromagnétique dans une cavité formée par deux milieux conducteurs parfaits

Pour obtenir l'expression de la force de Casimir il faut connaître les modes propres d'une cavité. Pour cela on considère une onde électromagnétique dans une cavité formée par deux milieux conducteurs parfaits distants de a formant des plans supposés infinis perpendiculaires à l'axe (Oz) comme représentés sur la figure 2 (on néglige les effets de bords en supposant $L \gg a$).

21. Quelle est l'équation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ au sein de la cavité vide de charge et de courant ? Quelle est le nom de cette équation ? Donner un exemple issu d'un autre domaine de la physique où cette équation est vérifiée.

Corrigé : Dans un domaine vide de charge et de courant, les équations de Maxwell découplées permettent d'obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique et le champ magnétique :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

L'équation de d'Alembert est vérifiée sur les exemples suivants (liste non exhaustive) :

- les ondes transversales le long d'une corde vibrante ;
- les ondes sonores (dans fluide ou dans un métal) ;
- les ondes longitudinales le long d'un ressort ;
- les ondes de tension et de courants dans un câble coaxial.

On cherche des solutions dans la cavité avec un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(k_z z + \varphi_z) \cos(\omega t - k_x x) \vec{u}_y. \quad (6)$$

22. Quelles sont les conditions aux limites imposées sur le champ électrique par la présence des milieux conducteurs parfaits ? Obtenir les expressions de k_z et φ_z qui vérifient ces conditions aux limites.

Corrigé :

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique au niveau des interfaces avec les milieux conducteurs parfaits impose : $\forall t, \forall x, \vec{E}(x, z=0, t) = \vec{E}(x, z=a, t) = \vec{0}$.

En $z=0$, la condition $\vec{E} = \vec{0}$ impose $\cos(\varphi_z) = 0$ soit $\varphi_z = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. On en déduit $\vec{E}(M, t) = \pm E_0 \sin(k_z z) \cos(\omega t - k_x x) \vec{u}_y$ (on prendra $\vec{E}(M, t) = E_0 \sin(k_z z) \cos(\omega t - k_x x) \vec{u}_y$ pour la suite). La deuxième condition aux limites impose $\sin(k_z a) = 0$ et donc $k_z a = n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ soit $k_z = \frac{n\pi}{a}$.

23. À quelle condition le champ électrique \vec{E} proposé est-il bien une solution de l'équation de la question 21 ?

Corrigé : On note $\vec{E} = E_y(x, z, t) \vec{u}_y$, en injectant dans l'équation de d'Alembert on obtient :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \Delta(E_y) \vec{u}_y = -(k_x^2 + k_z^2) E_y \vec{u}_y = -\frac{\omega^2}{c^2} E_y \vec{u}_y.$$

Le champ électrique proposé est une onde non plane qui vérifie l'équation de d'Alembert, à condition que la relation de dispersion :

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2};$$

soit vérifiée, ce qui impose l'expression suivante pour k_x^2 :

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}.$$

24. La relation de dispersion fait apparaître une pulsation de coupure dépendant d'un nombre entier. Calculer numériquement la fréquence de coupure correspondant au mode fondamental (lorsque l'entier est égal à 1) pour $a = 100$ nm. À quel domaine du spectre des ondes électromagnétiques correspond cette fréquence ?

Corrigé : La relation précédente peut s'écrire :

$$k_x^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}.$$

Remarque : On retrouve l'expression des pulsations propres dans le cas d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

Pour le mode propre fondamental $n = 1$, la fréquence est égale à $f_{c1} = \frac{c}{2a} = 1,5 \times 10^{15}$ Hz, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda_{c1} = \frac{c}{f_{c1}} = 2a = 200$ nm, il s'agit du domaine ultraviolet.

II.5. Réflexion sur un milieu conducteur dans le domaine optique

25. Dans le domaine optique on suppose $\tau\omega \gg 1$ (on rappelle que $\tau \simeq 10^{-14}$ s est la durée moyenne entre deux chocs successifs des électrons libres sur les cations du réseau). Que devient l'expression du vecteur densité de courant électrique (2) dans le domaine optique ? En déduire la relation de dispersion dans ce domaine et montrer qu'elle fait intervenir la pulsation plasma ω_p du milieu conducteur.

Corrigé :

Dans le domaine optique, le vecteur densité de courant électrique devient : $\vec{j} = \frac{\gamma_0}{i\omega\tau} \vec{E}$.
Les équations de Maxwell donnent l'équation d'onde suivante en notation complexe :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2};$$

ce qui donne la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \gamma_0}{\tau} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}.$$

26. Une onde électromagnétique de pulsation ω correspondant au domaine optique se propage dans le vide et arrive en incidence normale sur un milieu conducteur. Décrire en quelques lignes le comportement au niveau de l'interface en fonction de la relation d'ordre qui existe entre ω et ω_p .

Corrigé : Dans le domaine optique la relation de dispersion dans un métal correspond à celle d'un plasma peu dense.

Lorsque $\omega < \omega_p$, la puissance associée à l'onde incidente est totalement réfléchie, \underline{k} est imaginaire pur ce qui correspond à une onde évanescente dans le métal.

Lorsque $\omega > \omega_p$, une partie de l'onde incidente est transmise et se propage dans le métal sans atténuation : on parle de transparence ultraviolette pour les métaux.

III. La force de Casimir : une conséquence des fluctuations de l'énergie de point zéro

Dans cette partie, nous allons aborder quelques aspects quantiques de la force de Casimir.

III.1. L'oscillateur harmonique et l'énergie de point zéro

Le modèle de l'oscillateur harmonique a de nombreuses applications :

- Classiquement, le mouvement conservatif d'un point au voisinage d'une position d'équilibre stable est du type harmonique.
- Au niveau microscopique, les interactions entre les atomes d'une molécule, proches de l'équilibre, sont modélisées par des forces élastiques.

On peut se ramener au modèle de l'oscillateur harmonique pour étudier les vibrations des molécules et aussi les états vibratoires du vide.

Dans un premier temps, nous allons revoir l'oscillateur harmonique classique. Dans un second temps, l'étude quantitative des états vibratoires nécessitant un traitement quantique, nous trouverons l'expression de l'énergie de point zéro à partir de l'inégalité de Heisenberg.

On considère une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un axe (Ox), l'écart par rapport à sa position d'équilibre est notée x . Dans la description classique la particule oscille autour de cette position d'équilibre avec une pulsation propre notée ω_0 . Elle évolue dans un potentiel harmonique dont l'énergie potentielle est de la forme $V_p(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Le système est conservatif.

27. Écrire l'énergie mécanique E_m de la particule dans la description classique et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

Corrigé : L'énergie mécanique de la particule est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie

potentielle :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + V_p(x) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2.$$

L'énergie mécanique est conservée pour ce système conservatif, l'équation du mouvement se déduit de $\frac{dE_m}{dt} = 0$:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

28. La particule est située à l'instant initial à l'abscisse $x = 0$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$. Obtenir l'expression de la solution de l'équation différentielle correspondant aux conditions initiales décrites.

Corrigé : La forme des solutions de l'équation différentielle précédente est la suivante : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ soit :

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

Avec les conditions initiales $x(t=0) = 0$ et $\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = v_0$, la solution est $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

29. Présenter un système physique vérifiant une telle équation différentielle. Obtenir l'expression de ω_0 pour l'exemple proposé en fonction des paramètres physiques du système.

Corrigé : Différents systèmes vérifiant l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :

- un système masse-ressort, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (où k est la constante de raideur du ressort) ;
- les oscillations de faible amplitude d'un pendule simple, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ (g : accélération de la pesanteur terrestre et ℓ : longueur du pendule simple) ;
- la décharge d'un condensateur de capacité C dans un circuit LC non résistif, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

30. En utilisant l'inégalité de Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ et les expressions que vous avez trouvées pour l'oscillateur classique dans les questions précédentes, montrer que l'énergie moyenne de l'oscillateur $\langle E_m \rangle$ est bornée et a une valeur minimale.

Rappel : $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

Corrigé :

L'énergie mécanique de l'oscillateur est égale à une constante dont l'expression est donnée par les conditions initiales :

$$E_m = \langle E_m \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

D'autre part l'énergie cinétique moyenne et l'énergie potentielle moyenne sont égales et valent la moitié de l'énergie mécanique :

$$\langle E_c \rangle = \langle V_p \rangle = \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{E_m}{2}.$$

Pour ce mouvement sinusoidale on vérifie $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p_x \rangle = m\langle v \rangle = 0$ soit $\langle x^2 \rangle = \Delta x^2$ et $\langle p_x^2 \rangle = \Delta p_x^2$, on en déduit :

$$\langle x^2 \rangle = \Delta x^2 = \frac{2\langle V_p \rangle}{m\omega_0^2} = \frac{E_m}{m\omega_0^2};$$

et

$$\langle p_x^2 \rangle = \Delta p_x^2 = 2m\langle E_c \rangle = mE_m.$$

Soit :

$$\Delta x \Delta p_x = \sqrt{\frac{E_m}{m\omega_0^2} m E_m} = \frac{E_m}{\omega_0}.$$

En utilisant l'inégalité de Heisenberg, on obtient $\langle E_m \rangle \geq \frac{\hbar\omega_0}{2} = E_0$.

III.2. Obtention de l'expression de la force de Casimir

Le calcul exact de l'expression de la force de Casimir a été fait par H. B. G. Casimir en 1948¹. Il suppose que la température est nulle ($T = 0$ K).

Considérons une cavité de largeur a , délimitée par des parois parfaitement conductrices composée de deux plaques carrées de côtés L et parallèles au plan (xOy) (voir figure 2 pour les notations). Casimir a comparé la situation dans laquelle les deux plaques sont fortement espacées (cas numéro 1 où a est de l'ordre de grandeur de L et qui sera considéré plus tard comme l'infini) à celle où elles sont faiblement espacées (cas numéro 2 où $a \ll L$). Dans les deux cas, nous allons donner une expression de l'énergie totale dans la cavité en écrivant la somme des énergies de point zéro des modes du champ électromagnétique. Ces énergies seront notées respectivement E_{tot}^I et E_{tot}^{II} .

Les modes de vibrations possibles de la cavité définie par :

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad -\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq z \leq a, \quad (7)$$

sont associés aux vecteurs d'onde dont les coordonnées sont de la forme :

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{a}, \quad (8)$$

où n_x , n_y et n_z sont des entiers positifs et $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Dans un premier temps on cherche à écrire l'énergie totale correspondant à la somme des modes propres lorsqu'on fait varier k_x uniquement. La longueur L de la cavité dans la direction de l'axe (Ox) est suffisamment grande pour considérer que k_x varie continûment de 0 à $+\infty$.

L'énergie de point zéro d'un mode est égale à $E_0 = \frac{\hbar kc}{2}$.

31. On fait varier k_x d'une petite quantité dk_x . Combien de modes (noté dn_x) a-t-on entre k_x et $k_x + dk_x$? En déduire l'énergie δE_x des modes compris entre k_x et $k_x + dk_x$. Que dire de l'énergie totale E_x des modes propres lorsque k_x varie de 0 à $+\infty$?

Corrigé : D'après l'expression de k_x : $dn_x = \frac{L}{\pi} dk_x$. Pour avoir l'énergie δE_x , on multiplie le nombre de mode par l'énergie d'un mode $\frac{\hbar kc}{2}$ soit $\delta E_x = \frac{\hbar kc}{2} \frac{L}{\pi} dk_x$.

On en déduit :

$$E_x = \frac{\hbar c L}{2\pi} \int_{k_x=0}^{+\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} dk_x.$$

Cette énergie diverge, elle tend vers l'infini car on somme une énergie finie E_0 sur un nombre infini de modes.

On fait maintenant varier k_x et k_y continûment de 0 à $+\infty$.

32. Écrire l'énergie $\delta E_{x,y}$ obtenue lorsqu'on fait varier k_x d'une petite quantité dk_x puis k_y d'une petite quantité dk_y . En déduire l'expression de l'énergie totale $E_{x,y}$.

1. Calcul présenté par Casimir en 1948 « H.B.G. Casimir and D. Polder, Phys Rev 73,360 »

Corrigé :

On multiplie chacun des modes k_x par le nombre de modes $dn_y = \frac{L}{\pi} dk_y$ pour obtenir l'expression :

$$\delta E_{x,y} = \frac{\hbar kc}{2} dn_x dn_y = \frac{\hbar kc}{2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 dk_y dk_x.$$

On obtient alors l'expression de l'énergie totale $E_{x,y}$ en tenant compte de l'ensemble des modes lorsqu'on fait varier k_x et k_y :

$$E_{x,y} = \frac{\hbar c L^2}{2\pi^2} \int_{k_x=0}^{+\infty} \int_{k_y=0}^{+\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} dk_x dk_y.$$

On modifie l'expression précédente de $E_{x,y}$ en introduisant $r_k^2 = k_x^2 + k_y^2$ et on obtient l'expression de l'énergie totale E_{tot}^I dans le cas d'une cavité de grande longueur en sommant sur les modes propres correspondant à k_z :

$$E_{\text{tot}}^I = \frac{\hbar c L^2}{2\pi} \frac{a}{\pi} \int_{k_z=0}^{+\infty} \int_{r_k=0}^{+\infty} \sqrt{r_k^2 + k_z^2} r_k dr_k dk_z. \quad (9)$$

Dans le cas d'une petite cavité (cas numéro 2), il faut tenir compte de la quantification des modes propres dans la direction de l'axe (Oz). On obtient alors pour l'expression de l'énergie totale :

$$E_{\text{tot}}^{II} = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \sqrt{r_k^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{a^2}} \right) r_k dr_k. \quad (10)$$

Ces deux énergies totales E_{tot}^I et E_{tot}^{II} divergent car elles correspondent à la somme sur une infinité de modes propres, néanmoins la différence peut être calculée à l'aide de la formule d'Euler-Maclaurin, le résultat donne :

$$E_{\text{PP}}(a) = E_{\text{tot}}^{II} - E_{\text{tot}}^I = -\frac{\hbar c \pi^2 L^2}{24 \times 30 a^3}. \quad (11)$$

33. Retrouver à partir de l'expression (11) la force de Casimir.

Corrigé :

On dérive l'expression précédente par rapport à la distance a entre les deux miroirs :

$$F = -\frac{\partial E_{\text{PP}}(a)}{\partial a} = -\frac{\hbar c \pi^2 L^2}{240 a^4}.$$

On retrouve bien l'expression de la norme de la force de Casimir obtenue à la question (1).

IV. Mesure de la force de Casimir

Suite à la prédiction théorique faite en 1948, de nombreuses équipes de recherche se sont attelées à la mesure de l'effet Casimir. Les premières mesures de précision ont été obtenues à la fin des années 1990. Pour éviter les problèmes pratiques liés à l'alignement de deux surfaces planes distantes de moins de $1,0 \mu\text{m}$, dans les expériences menées l'une des deux surfaces métalliques est souvent une sphère de rayon R , l'expression de la force de Casimir est alors modifiée. Dans cette géométrie, utilisée dans toute la suite du sujet, l'expression de la force de Casimir entre un plan

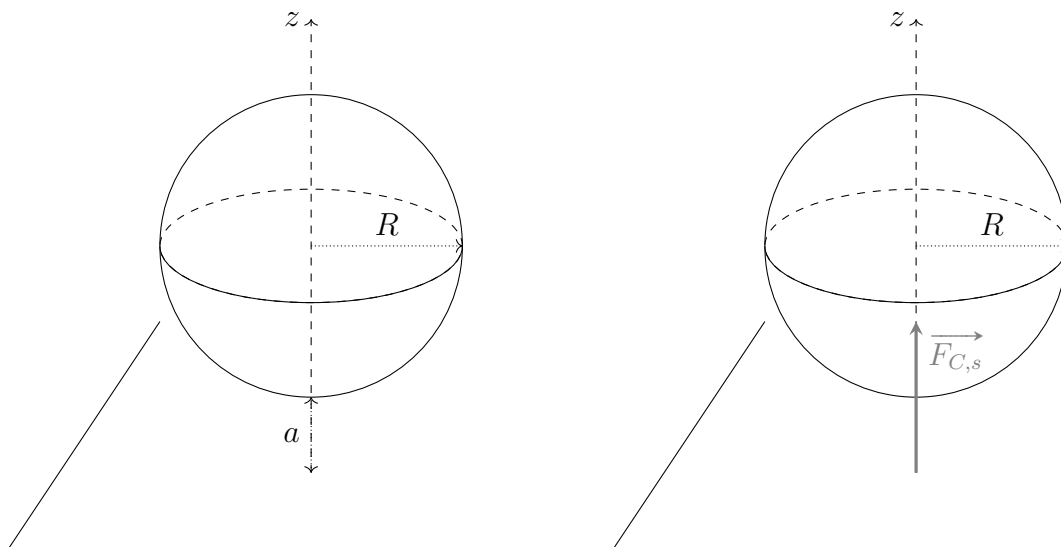


FIGURE 5 – Force Casimir qui s'exerce entre une surface plane et une sphère distante de a .

métallique et une sphère métallique devient (lorsque les deux surfaces sont séparées par du vide et que les deux métaux sont assimilés à des milieux conducteurs parfaits) :

$$\vec{F}_{C,s} = F_{C,s} \vec{u}_z = -\frac{\pi^3 \hbar c R}{360 a^3} \vec{u}_z \quad (12)$$

avec a la plus petite distance entre la sphère et le plan métallique comme représenté sur la figure 5.

Les différentes expériences ont permis de mettre en évidence les principales corrections liées à la situation expérimentale, et dont il faut tenir compte pour comparer la mesure à l'expression (12). Les corrections étudiées ici sont liées :

- à la rugosité des surfaces ;
- aux éventuels effets de température.

IV.1. Effet de la température

L'expression (12) est correcte à température nulle, lorsque seuls les modes propres liés à l'énergie du point zéro exercent une pression de radiation sur les plaques. À température non nulle, il faut tenir compte de la pression de radiation exercée par les photons d'origine thermique.

La densité volumique d'énergie des photons par mode à la température T est issue de la loi de Planck :

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad \text{en J m}^{-3} \text{ s.} \quad (13)$$

34. Quel est l'ordre de grandeur typique de la longueur d'ondes pour les photons thermiques à température ambiante ? En comparant à la taille a de la cavité, conclure sur la présence de photons thermiques au sein de la cavité.

Corrigé : L'ordre de grandeur de la longueur d'onde des photons thermiques à température ambiante est donnée par la loi de déplacement de Wien, soit à température ambiante (~ 300 K) $\lambda_T \simeq 10 \mu\text{m}$, longueur d'onde qui correspond au domaine infrarouge et qui est très supérieure à la taille de la cavité $\lambda_T \gg a$. D'après la question 24, les ondes électromagnétiques associées aux photons thermiques ne peuvent pas se propager au sein de la cavité. Les photons thermiques ne sont pas présents au sein de la cavité.

35. Quel est l'ordre de grandeur de la pression de radiation liée aux photons thermiques à température ambiante ? Comparer à ΔP_{cas} , la différence de pression calculée à la question 2. Conclure sur l'effet de la température dans les mesures de l'effet Casimir.

Corrigé : La densité volumique d'énergie associée aux photons thermiques s'obtient en intégrant la relation 13 :

$$u(T) = \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} d\omega.$$

On procède au changement de variables $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ et on utilise la formule intégrale fournie dans le préambule on obtient :

$$u(T) = \frac{k_B^4 \pi^2 T^4}{15 \hbar^3 c^3}.$$

D'après la question 17 ou 20, la pression de radiation liée aux photons thermiques peut directement être assimilée (en ordre de grandeur) à la densité volumique d'énergie associée soit $u(T) = P_T$, il faut la calculer numériquement à une température $T \simeq 300$ K.

On obtient numériquement $u(T) = 6,13 \times 10^{-6}$ Pa. On vérifie bien $u(T) \ll \Delta P_{\text{cas}}$, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la cavité liée aux photons thermiques est négligeable à température ambiante par rapport à la différence de pression liée à la force Casimir.

On peut négliger l'effet de la température à $T \simeq 300$ K dans les mesures de la force Casimir.

IV.2. Correction liée à la rugosité

L'expression (12) de la force de Casimir entre un plan et une sphère distants de a est obtenue en considérant que les deux surfaces n'ont pas de rugosité. Expérimentalement, ce n'est pas le cas.

Pour l'étude de la rugosité, on se ramène à l'étude de deux plans parallèles distants de a . En effet la force $\vec{F}_{C,S}$ donnée par la formule (12) s'écrit à l'aide de l'énergie d'interaction entre deux surfaces planes sous la forme $\vec{F}_{C,S} = K E_{\text{PP}}(a) \vec{u}_z$ où $E_{\text{PP}}(a)$ est donnée par l'expression (11).

36. Donner l'expression de la constante multiplicative K en fonction des paramètres géométriques introduits.

Corrigé : Avec les deux formules fournies on obtient $K = \frac{2\pi R}{L^2}$.

On suppose que les deux miroirs ont des profils de rugosité définis par les fonctions **algébriques** $h_1(\vec{r})$ et $h_2(\vec{r})$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ est la position transverse dans la cavité orthogonale à la direction de l'axe (Oz) comme représenté sur le schéma de la figure (6).

La fonction $h_1(\vec{r})$ (de même pour $h_2(\vec{r})$) est positive lorsqu'elle augmente la distance entre les deux miroirs, négative sinon.

Pour tenir compte de cette rugosité, l'énergie d'interaction entre deux plaques rugueuses notée $\mathcal{E}_{\text{PP}}(a)$ est obtenue en moyennant les contributions des diverses distances effectives :

$$\mathcal{E}_{\text{PP}}(a) = \langle E_{\text{PP}}(a(\vec{r})) \rangle \quad (14)$$

où $a(\vec{r})$ est la distance effective entre les deux points se faisant face correspondant à une position transverse \vec{r} . C'est aussi la somme de la longueur moyenne a de la cavité et des profils décrivant la rugosité des surfaces sur les deux miroirs $h_1(\vec{r})$ et $h_2(\vec{r})$. Son expression est la suivante :

$$a(\vec{r}) = a + h_1(\vec{r}) + h_2(\vec{r}); \quad (15)$$

et le symbole $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne sur les positions transverses. La moyenne des distances effectives notée $\langle a(\vec{r}) \rangle$ vérifie $\langle a(\vec{r}) \rangle = a$ car les déplacements respectifs moyens notés $\langle h_1 \rangle$ et $\langle h_2 \rangle$ sont par définition nuls.

On suppose que l'amplitude de la rugosité est faible devant a : $|\frac{h_1}{a}| \ll 1$ et $|\frac{h_2}{a}| \ll 1$.

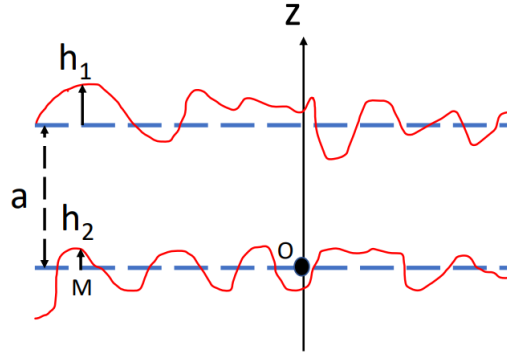


FIGURE 6 – Schéma représentant les profils de rugosité sur les deux miroirs plans parallèles. Sur ce schéma $h_1(M) > 0$ car elle augmente la distance entre les miroirs et $h_2(M) < 0$ car elle diminue la distance entre les deux miroirs.

37. Réaliser un développement limité de $\mathcal{E}_{PP}(a)$ au deuxième ordre en $\frac{h_1+h_2}{a}$, en déduire l'expression de $\mathcal{E}_{PP}(a)$ en fonction de $E_{PP}(a)$, sa dérivée seconde et $\langle h^2 \rangle$ où $h = h_1 + h_2$.

Corrigé :

Par définition :

$$\mathcal{E}_{PP}(a) = \langle E_{PP}(a(\vec{r})) \rangle = \langle E_{PP}(a + h_1 + h_2) \rangle;$$

par un développement limité à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_{PP}(a) = \langle E_{PP}(a) + \frac{dE_{PP}}{da}(h_1 + h_2) + \frac{d^2E_{PP}}{da^2} \frac{(h_1 + h_2)^2}{2} \rangle;$$

Par linéarité de la valeur moyenne et en utilisant $\langle h_1 \rangle = 0$ et $\langle h_2 \rangle = 0$ on obtient :

$$\mathcal{E}_{PP}(a) = E_{PP}(a) + \frac{d^2E_{PP}}{da^2} \frac{\langle (h_1 + h_2)^2 \rangle}{2};$$

soit encore :

$$\mathcal{E}_{PP}(a) = E_{PP}(a) + \frac{d^2E_{PP}}{da^2} \frac{\langle h^2 \rangle}{2}.$$

38. Montrer alors que l'expression de la force de casimir entre une sphère et un plan notée $F_{C,s}^{(1)}$ tenant compte de la rugosité peut s'écrire :

$$F_{C,s}^{(1)} = F_{C,s} \left[1 + 6 \frac{\langle h^2 \rangle}{a^2} \right]. \quad (16)$$

Corrigé :

Pour tenir compte de la rugosité :

$$F_{C,s}^{(1)} = K \mathcal{E}_{PP}(a) = K \left(E_{PP}(a) + \frac{d^2E_{PP}}{da^2} \frac{\langle h^2 \rangle}{2} \right) = \underbrace{KE_{PP}(a)}_{F_{C,s}} \left[1 + \frac{1}{E_{PP}(a)} \frac{d^2E_{PP}}{da^2} \frac{\langle h^2 \rangle}{2} \right].$$

Le calcul donne $\frac{d^2E_{PP}}{da^2} = -\frac{12\hbar c \pi^2 L^2}{720a^5}$ soit :

$$\frac{1}{E_{PP}(a)} \frac{d^2E_{PP}}{da^2} = \frac{12}{a^2};$$

ce qui permet bien d'obtenir l'expression proposée.

39. En prenant $a = 150 \text{ nm}$ et en considérant que $\sqrt{\langle h^2 \rangle} = 35 \text{ nm}$, calculer l'erreur relative sur la force de Casimir liée à la présence de la rugosité.

Corrigé :

L'erreur relative est de l'ordre de :

$$\frac{F_{C,s}^{(1)} - F_{C,s}}{F_{C,s}} = 6 \frac{\langle h^2 \rangle}{a^2} = 32,7 \%$$

La rugosité étant du même ordre de grandeur que la taille a de la cavité, elle est prépondérante dans la mesure de la force Casimir.

40. Interpréter qualitativement que la rugosité entraîne une augmentation de la force de Casimir.

Corrigé :

Pour cette question considérons la force locale de Casimir entre deux plans par unité de surface :

$$\frac{dF_C}{dS} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}$$

On considère une largeur de cavité de la forme $a(\vec{r}) = a + \epsilon$. Un développement limité à l'ordre 2 de la force surfacique donne :

$$\frac{dF_C}{dS} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \left(1 - 4 \frac{\epsilon}{a} + 10 \frac{\epsilon^2}{a^2} \right)$$

Au niveau d'un creux, par exemple $\epsilon = h_0 > 0$, la force locale de Casimir diminue (car la distance entre les deux miroirs est plus grande) :

$$\left(\frac{dF_C}{dS} \right)_{\text{creux}} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \left(1 - 4 \frac{h_0}{a} + 10 \frac{h_0^2}{a^2} \right) < \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}$$

Au niveau d'une bosse, par exemple $\epsilon = -h_0 > 0$, la force locale de Casimir augmente (car la distance entre les deux miroirs est plus petite) :

$$\left(\frac{dF_C}{dS} \right)_{\text{bosse}} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \left(1 + 4 \frac{h_0}{a} + 10 \frac{h_0^2}{a^2} \right) > \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}$$

Lorsqu'on ajoute les différentes contributions, les termes d'ordre 1 se compensent mais les termes d'ordre 2 s'ajoutent, globalement l'augmentation de la force au niveau d'une bosse a plus d'effet que la diminution de la force au niveau d'un creux d'où une force de Casimir qui augmente globalement avec la rugosité.

IV.3. Mesure de la force de Casimir en utilisant un microscope à force atomique (AFM)

En 1998, U. Mohideen et A. Roy font des mesures de précision de la force de Casimir en utilisant un microscope à force atomique. Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure 7. Dans cette partie plusieurs figures et les courbes sont issues de l'article « U. Mohideen and A. Roy, Precision measurement of Casimir force from 0,1 to 0,9 μm , PRL, volume 81, 4549 (1998). »

Un extrait de l'article de U. Mohideen et A. Roy est donné ci-dessous, il précise l'exploitation de la courbe donnée en figure 11 représentant l'évolution du signal issu du détecteur à photodiodes en fonction du déplacement de la plaque métallique. L'extrait de l'article est le suivant :

« In the AFM, the force on a cantilever is measured by the deflection of its tip. A laser beam is reflected off the cantilever tip to measure its deflection. A force on the

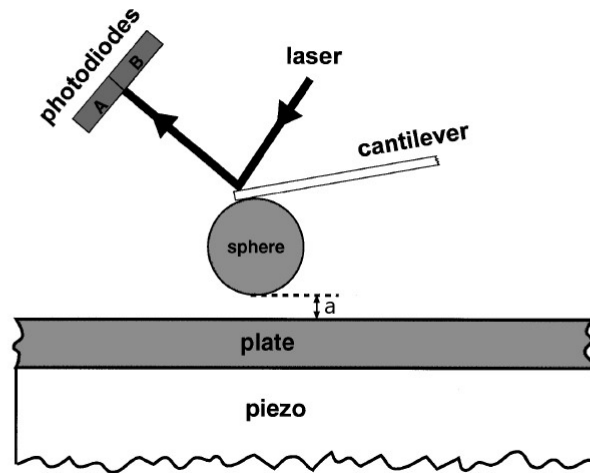


FIGURE 7 – Schéma de l'expérience réalisée par U. Mohideen et A. Roy. En appliquant une tension à l'élément piézoélectrique, la plaque métallique peut être déplacée vers la sphère. L'expérience a été réalisée à température ambiante et sous une pression de 50 mTorr.

sphere would result in a cantilever deflection leading to a difference signal between photodiodes A and B (shown in figure 7). This force and the corresponding cantilever deflection are related by Hooke's law : $F = k d$, where k is the force constant, and d is the cantilever deflection.[...]

To measure the Casimir force between the sphere and the plate they are grounded together with the AFM. The plate is then moved towards the sphere in 3.6 nm steps and the corresponding photodiode difference signal was measured (approach curve). The signal obtained for a typical scan is shown in Fig. 11. Here « 0 » separation stands for contact of the sphere and plate surfaces. [...] Region 1 shows that the force curve at large separations is dominated by a linear signal. This is due to the increased coupling of scattered light into the diodes from the approaching flat surface. Embedded in the signal is a long range electrostatic force from the contact potential difference between the sphere and the plate and the Casimir force (small at such large distance).

In region 2 (absolute separations between contact and 250 nm) the Casimir force is the dominant characteristic far exceeding all the systematic errors (the electrostatic force is less than 3 % of the Casimir force in this region).

Region 3 is the flexing of the cantilever resulting from the continued extension of the piezo after contact of the two surfaces. Given the distance moved by the flat plate (x axis), the difference signal of the photodiodes can be calibrated to a cantilever deflection in nanometers using the slope of the curve in region 3. The deflection of the cantilever leads to a decrease in the sphere-plate separation in regions 1 and 2 which can be corrected by use of the slope in region 3. This cantilever deflection correction to the surface separation is of the order of 1 % and is given as $a = a_{\text{piezo}} - \frac{S_{\text{pd}}}{m}$, where a is the corrected separation between the two surfaces, a_{piezo} is the separation from the voltage applied to the piezo, i.e., x axis of Fig. 11, m is the slope of the linear curve in region 3, and S_{pd} is the photodiode difference signal shown along the y axis in Fig. 11. »

Nous allons étudier certains aspects de la photodiode à quadrant, avant de s'intéresser à l'extrait de l'article.

Utilisation de la photodiode à quadrants

La déflexion de la pointe de l'AFM est mesurée à l'aide d'une photodiode à quadrant, en l'absence de déflexion les deux quadrants A et B de la photodiode reçoivent une même intensité lumineuse, la différence entre les signaux de sorties des deux quadrants est nulle.

La déflexion de la pointe entraîne la déviation du faisceau laser et une modification de l'éclairement des deux quadrants A et B de la photodiode.

Chaque quadrant de la photodiode est relié à un montage convertisseur courant-tension comme représenté sur la figure 8. Ce montage contient un amplificateur linéaire intégré supposé idéal et de gain infini.

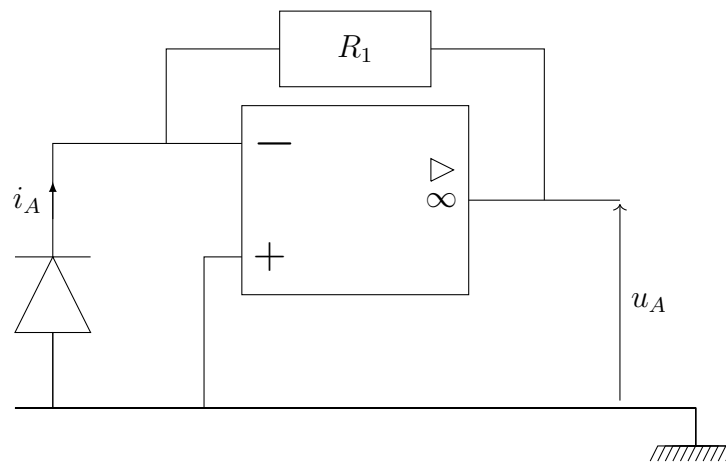


FIGURE 8 – Montage convertisseur courant-tension.

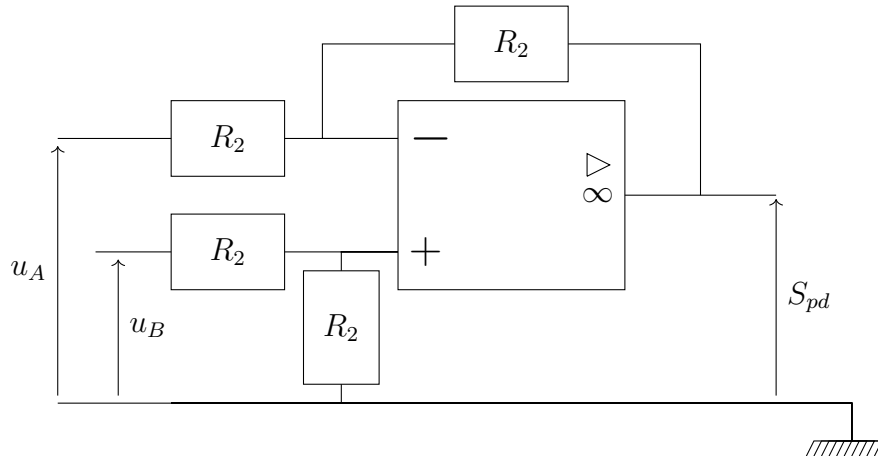


FIGURE 9 – Montage soustracteur.

41. Dans le montage de la figure 8, donner l'expression de la tension de sortie u_A en fonction du photocourant i_A issu du quadrant A de la photodiode.

Corrigé :

Dans le montage de la figure 8, l'ALI fonctionne en régime linéaire (rétroaction sur la borne inverseuse). Les courants d'entrée sont nuls, ainsi on obtient : $u_A = -R_1 i_A$.

Les tensions u_A et u_B issues des deux quadrants A et B de la photodiode sont reliées au montage de la figure 9 contenant un amplificateur linéaire intégré supposé idéal et de gain infini.

42. Dans le montage de la figure 9, donner l'expression de la tension de sortie S_{pd} en fonction des photocourants i_A et i_B issus des deux quadrants de la photodiode. Justifier qu'une déflexion

de la pointe donne une tension de sortie S_{pd} non nulle proportionnelle à la déviation du faisceau laser, pour de petits déplacements du faisceau.

Corrigé : L'ALI fonctionne en régime linéaire et les courants d'entrée sont nuls. L'égalité des courants dans les résistances de chaque branche donne :

$$\frac{u_A - V_-}{R_2} = \frac{V_- - S_{pd}}{R_2} \quad \text{et} \quad \frac{u_B - V_+}{R_2} = \frac{V_+}{R_2};$$

avec $V_+ = V_-$, on en déduit : $S_{pd} = u_B - u_A = R_1(i_A - i_B)$.

Une déflexion de la pointe entraîne une déviation du faisceau laser qui modifie l'éclairement des deux quadrants A et B et donc les valeurs des photocourants i_A et i_B (proportionnels à l'éclairement des deux quadrants). La tension de sortie est donc proportionnelle à la déflexion de la pointe (ce que l'on constate dans la région 3 de la courbe 11).

Le déplacement minimal mesurable du faisceau laser par la photodiode à quadrant est de l'ordre de $0,75 \mu\text{m}$.

Exploitation de l'extrait de l'article

Dans cette expérience le rayon $R = 98,0 \mu\text{m}$ de la sphère métallique a été mesuré par microscopie électronique à balayage (figure 10). La plaque et la sphère sont en aluminium et l'amplitude quadratique moyenne de la rugosité des surfaces a été mesurée par AFM : $\sqrt{\langle h^2 \rangle} = 35 \text{ nm}$.

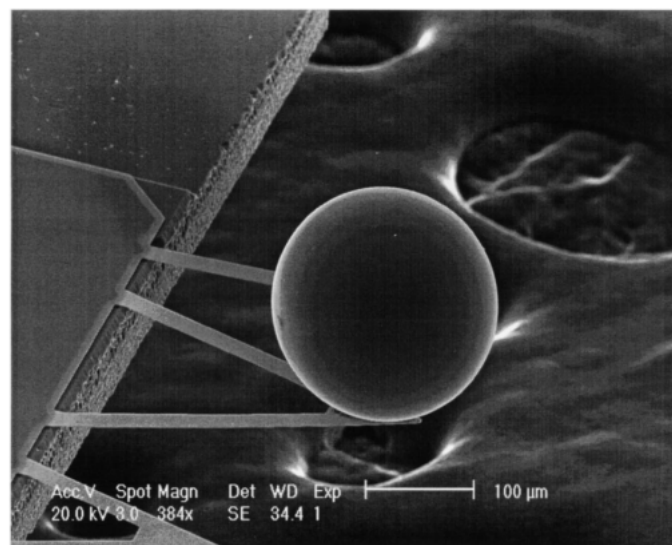


FIGURE 10 – Image de la sphère métallique montée sur la pointe de l'AFM obtenue par microscopie électronique à balayage.

En mesurant le déplacement de l'extrémité de la pointe du microscope sur laquelle est fixée la sphère, on obtient après calculs l'évolution de la force de Casimir $F_{C,s}^{\text{exp}}$ en fonction de la distance a entre la sphère et la plaque métallique. Les résultats expérimentaux sont consignés sur la figure 12.

43. *Cette question nécessite de l'initiative de la part du candidat : toute tentative de résolution sera valorisée.* En vous appuyant sur le schéma de la figure 7, expliquer le principe de la mesure du déplacement de l'extrémité la pointe dans un microscope à force atomique. Faire un schéma. Préciser la relation entre le déplacement du faisceau laser d_{laser} et le déplacement vertical subi par l'extrémité de la poutre noté d faisant intervenir D la distance entre la photodiode et la poutre et L la longueur de la poutre. Quel doit être l'ordre de grandeur de D pour mesurer $d \sim 5,0 \text{ nm}$?

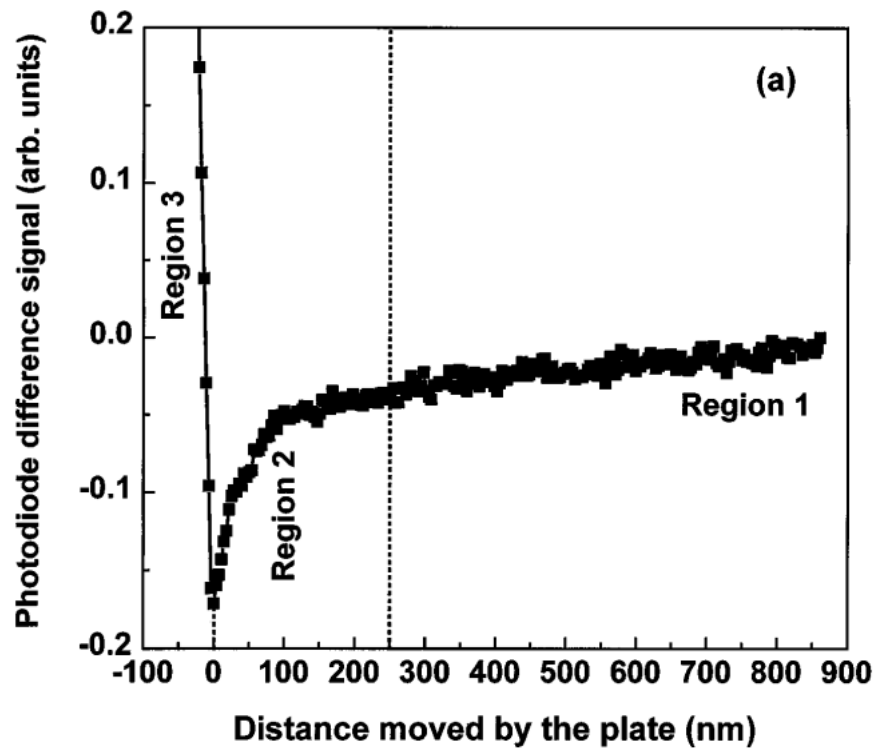


FIGURE 11 – Allure de l'évolution de la différence des signaux issus des photodiodes en fonction du déplacement de la plaque.

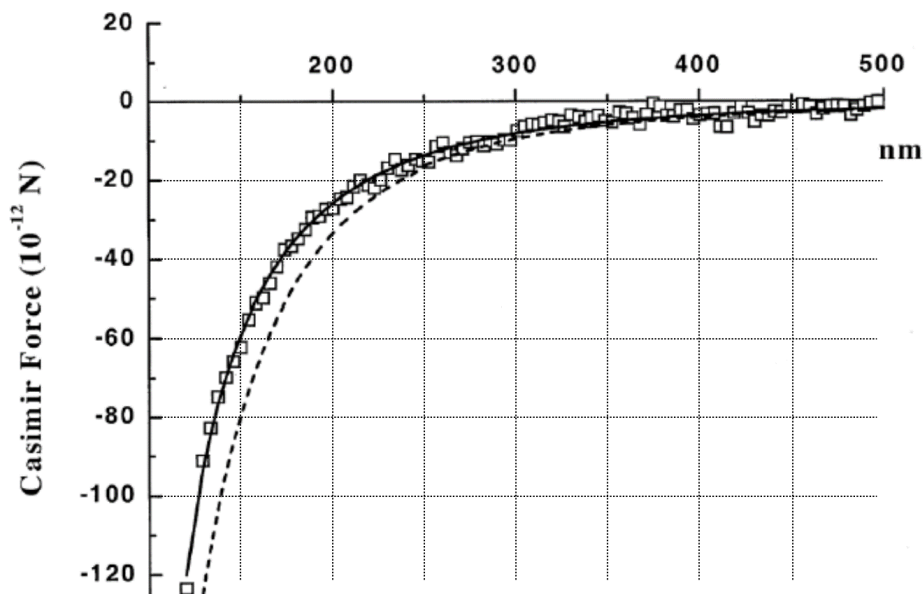


FIGURE 12 – Résultats expérimentaux de la force de Casimir mesurée en fonction de la distance sphère-plaque. La courbe en trait plein représente l'expression théorique de la force Casimir tenant compte des corrections de conductivité et de rugosité. La courbe en trait pointillé correspond à la courbe théorique de la force de Casimir sans correction. Les points de mesures sont représentés par des carrés dont la dimension permet d'estimer les incertitudes de mesure.

Corrigé :

Le schéma avec les différentes notations est représenté sur la figure 13.

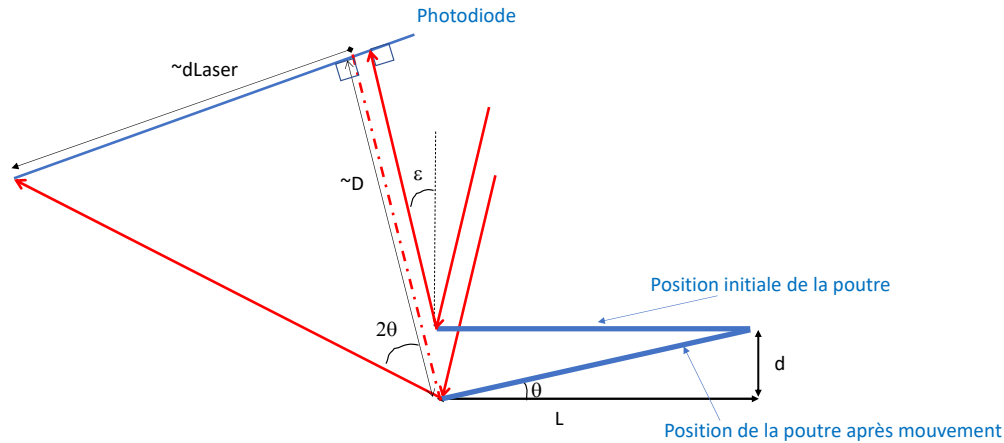


FIGURE 13 – Principe de la déflexion du faisceau laser par la poutre solidaire de la sphère

Lorsque la pointe subit une déflexion d'un petit angle $\theta \simeq \frac{d}{L}$, le laser est dévié d'un angle double après réflexion sur la pointe soit $2\theta \simeq \frac{d_{\text{laser}}}{D}$. Le lien entre les différences distance est donc $\frac{d_{\text{laser}}}{D} = 2\frac{d}{L}$.

Pour mesurer une déflexion de l'ordre de $d \sim 5,0 \text{ nm}$, la taille de la poutre étant de l'ordre de quelques $100 \mu\text{m}$ d'après la figure 10, on choisit $L \simeq 250 \mu\text{m}$, l'ordre de grandeur de D est donc $D = \frac{d_{\text{laser}}L}{2d} \sim 40 \text{ mm}$ avec $d_{\text{laser}} = 0,75 \mu\text{m}$, la plus petite distance mesurable pour la déviation du laser par la photodiode.

44. Expliquer la signification de la phrase suivante de l'article : « To measure the Casimir force between the sphere and plate they are grounded together with the AFM. » et expliquer pourquoi l'on prend cette précaution.

Corrigé : Cette phrase signifie que l'ensemble de la sphère, la plaque métallique et l'AFM sont mis au même potentiel par une liaison électrique. Cette précaution est prise pour éviter toute interaction de type électrostatique entre la plaque et la sphère. Néanmoins il reste une interaction électrostatique résiduelle faible (certainement liée aux différence de potentiels liés aux interfaces).

45. Dans la formule $a = a_{\text{piezo}} - \frac{S_{pd}}{m}$ issue de l'extrait de l'article, expliquer la différence entre a et a_{piezo} et la signification de ces deux termes. Quelle est l'erreur relative effectuée sur a si on l'assimile à a_{piezo} ?

Corrigé :

La plaque métallique liée au piézoélectrique peut être déplacée pour modifier la distance entre la plaque et la sphère, la distance entre la plaque et la position initiale de la sphère contrôlée par le piézoélectrique est notée a_{piezo} .

La distance effective a entre la plaque et la sphère est modifiée par la déflexion de la pointe (liée à la force Casimir), elle est égale à $a = a_{\text{piezo}} - d$.

D'après l'article, la correction sur a_{piezo} pour obtenir a est de l'ordre de 1 %.

46. Proposer une méthode permettant de déterminer la force de Casimir à partir de la mesure de d .

Corrigé :

La mesure de la force Casimir se déduit de la mesure du déplacement de l'extrémité de la pointe. La force Casimir et d sont proportionnelles d'après la loi de Hooke, pour cela il est nécessaire de calibrer le microscope à force atomique pour obtenir la valeur numérique de la constante de raideur k de la pointe (ce calibrage peut s'effectuer en imposant une différence de potentiels entre les deux surfaces).

47. Obtenir à partir de la figure 12, la valeur numérique de la force de Casimir mesurée à la distance $a = 150$ nm notée $F_{C,s}^{\text{exp}}$ (attention l'abscisse commence à une valeur $a = 100$ nm) ainsi que son incertitude, notée $u(F_{C,s}^{\text{exp}})$. Obtenir la valeur numérique de la force de Casimir théorique sans tenir compte des corrections puis calculer l'écart normalisé.

Obtenir la valeur numérique théorique de la force de Casimir tenant compte des corrections, notée $F_{C,s}^{\text{corr}}$. Calculer l'écart normalisé avec cette nouvelle valeur théorique puis conclure.

Corrigé : La mesure de force de Casimir pour $a = 150$ nm est égale à $F_{C,s}^{\text{exp}} = -63 \times 10^{-12}$ N.

L'incertitude est estimée à $u(F_{C,s}^{\text{exp}}) = 3,0 \times 10^{-12}$ N. En l'absence de correction, la valeur théorique de la force Casimir donnée par l'expression 12 est égale à $F_{C,s} = -79,1 \times 10^{-12}$ N.

Le premier écart normalisé avec la valeur théorique sans correction est égal à $E_{N1} = \frac{|F_{C,s}^{\text{théo}} - F_{C,s}^{\text{exp}}|}{u(F_{C,s}^{\text{exp}})} = 5,5 > 2$.

À partir du graphe on obtient $F_{C,s}^{\text{corr}} = -60 \times 10^{-12}$ N. Le deuxième écart normalisé avec la valeur théorique tenant compte des corrections est égal à $E_{N2} = 1 < 2$.

La prise en compte des corrections est donc nécessaire pour valider les résultats expérimentaux.