

# DES MESURES DU TEMPS AU COURS DES TEMPS

## A- Clepsydre ou sablier ?

### I/Principe d'une clepsydre

1. Le premier terme  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  représente l'accélération locale, le deuxième  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  l'accélération convective provenant du fait que la particule fluide se déplace en des lieux où la vitesse varie. Le troisième représente la résultante volumique des forces de pression, le quatrième est le poids volumique et le dernier représente la résultante volumique des forces visqueuses.

2. Pour un liquide sans viscosité  $\eta = 0$  et si l'écoulement est quasi-stationnaire  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq \vec{0}$  si bien que l'équation de Navier-Stokes se simplifie en

$$\mu \left( (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \vec{g}$$

Avec le formulaire on obtient

$$\mu \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \vec{g}$$

Avec un fluide homogène, on peut « faire passer » les  $\mu$  dans les gradients pour obtenir, avec  $v^2 = \|\vec{v}\|^2$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\mu v^2}{2} + p + \mu g y \right) = - \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

En effectuant le produit scalaire, membre à membre, avec un élément  $d\vec{\ell}$  d'une ligne de courant (donc colinéaire à  $\vec{v}$ ) on obtient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\mu v^2}{2} + p + \mu g y \right) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

car le vecteur  $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$  est, par définition du produit vectoriel, orthogonal à  $\vec{v}$  donc à  $d\vec{\ell}$ . On écrit donc  $\frac{\mu v^2}{2} + p + \mu g y = \text{cte}$  sur une ligne de courant. Et donc avec un fluide homogène cela montre bien que

$\frac{p}{\mu} + g y + \frac{v^2}{2} \text{ se conserve sur une ligne de courant}$
--

3. On peut identifier facilement deux termes d'énergie massique dans cette relation :  $e_c = \frac{v^2}{2}$  représente un terme d'énergie cinétique massique et  $e_p = g y$  un terme d'énergie potentielle de pesanteur massique. Ainsi sur la ligne de courant entre deux points A et B

$$\Delta(e_c + e_p) = - \frac{p_A}{\mu} + \frac{p_B}{\mu}$$

Ce second membre représente le travail massique des forces pressantes en amont du point A et en aval du point B.

4. La masse de conserve au cours de l'écoulement et pour un fluide incompressible cela revient au même

d'écrire la conservation du débit volumique ou massique. Au niveau de la surface supérieure (valant  $\pi R_c^2$ ), la vitesse du fluide est  $-\frac{dh}{dt}$ , et au niveau de l'orifice (de surface  $\pi r^2$ ) la vitesse vaut  $v_s(t)$ , on obtient

$$\boxed{-R_c^2 \frac{dh}{dt} = r^2 v_s(t)}$$

5. Pour un écoulement quasi-stationnaire on peut utiliser la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant reliant un point de la surface supérieure de la clepsydre à un point du fluide au niveau de l'orifice de sortie. Le jet de sortie étant libre, la pression vaut  $p_{atm}$  comme au dessus de la clepsydre ce qui donne

$$gh(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \frac{p_{atm}}{\mu} = \frac{1}{2} v_s^2(t) + \frac{p_{atm}}{\mu}$$

Soit

$$\boxed{gh(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} v_s^2(t)}$$

6. On élimine  $v_s(t)$  entre les deux équations obtenues soit

$$gh(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{R_c}{r} \right)^4 \left( \frac{dh}{dt} \right)^2$$

$$\left( \frac{dh}{dt} \right)^2 \left( \frac{R_c^4}{r^4} - 1 \right) = 2gh$$

et en tenant compte du fait que  $\frac{dh}{dt} < 0$  lorsque la clepsydre se vide

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gh} \frac{r^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}}}$$

7. On sépare les variables  $h$  et  $t$  pour la résolution ce qui donne

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g} \frac{r^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} dt$$

On intègre entre les instants  $t = 0$  ou  $h = h_0$  et  $t$  pour obtenir

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{2g} \frac{r^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} t$$

soit

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - r^2 \sqrt{\frac{g}{2(R_c^4 - r^4)}} t$$

ou encore

$$\boxed{h(t) = \left( \sqrt{h_0} - \alpha t \right)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = r^2 \sqrt{\frac{g}{2(R_c^4 - r^4)}}$$

8. On a vu à la question 4. que  $v_s(t) = -\frac{R_c^2}{r^2} \frac{dh}{dt}$  et le résultat de la question 6. donne  $\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g} \frac{r^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} \sqrt{h}$  donc ici

$$v_s(t) = \sqrt{2gh} \frac{R_c^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} = \frac{R_c^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} \left( \sqrt{2gh_0} - \sqrt{2g} \alpha t \right)$$

et

$$D_v(t) = \pi r^2 v_s(t) = \frac{\pi r^2 R_c^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} \left( \sqrt{2gh_0} - \sqrt{2g\alpha t} \right)$$

Pour que le volume déversé soit proportionnel au temps écoulé, il faut que le débit volumique soit constant ce qui n'est pas le cas ici puisque  $\alpha$  n'est jamais nul.

9. Dans la cas où  $R_c \gg r$ , on peut écrire que  $\frac{R_c^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}} \simeq 1$  et on a vu ci-dessus que

$$v_s(t) = \sqrt{2gh} \frac{R_c^2}{\sqrt{R_c^4 - r^4}}$$

ce qui permet bien d'écrire la formule de Toricelli

$$\boxed{v_s = \sqrt{2gh}}$$

10. Pour obtenir un débit de sortie constant il faut donc que  $v_s$  ne dépende plus du temps. Dans ce cas avec le résultat de la question 4.  $\frac{dh}{dt} = -\frac{r^2}{R_1^2} v_s$ , résultat qu'on peut injecter dans l'équation obtenue à la question

5. pour écrire

$$2gh = v_s^2 \left( 1 - \frac{r^4}{R_1^4} \right)$$

Or ici  $h = y$  donc

$$1 - \frac{2gy}{v_s^2} = \frac{r^4}{R_1^4}$$

et alors

$$R_1(y) = \frac{r}{\left( 1 - \frac{2g}{v_s^2} y \right)^{1/4}}$$

On peut obtenir l'expression de  $v_s^2$  constante à l'aide de la relation qu'on vient d'établir  $2gh = v_s^2 \left( 1 - \frac{r^4}{R_1^4} \right)$  qu'on écrit à l'instant initial pour obtenir

$$2gh_0 = v_s^2 \left( 1 - \frac{r^4}{R_0^4} \right)$$

ou encore

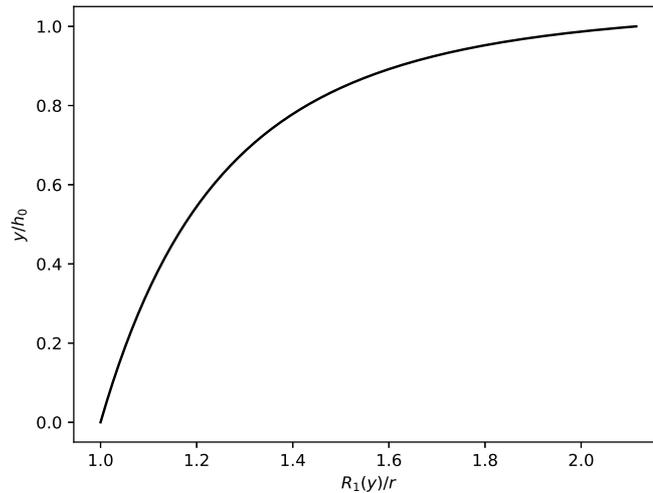
$$\frac{2g}{v_s^2} = \frac{1}{h_0} \left( 1 - \frac{r^4}{R_0^4} \right)$$

ce qui donne l'expression de  $R_1(y)$

$$\boxed{R_1(y) = \frac{r}{\left( 1 - \frac{1}{h_0} \left( 1 - \frac{r^4}{R_0^4} \right) y \right)^{1/4}}$$

qui est l'expression attendue avec  $A_1 = r$ ,  $\beta_1 = 1 - \frac{r^4}{R_0^4}$  et  $\gamma_1 = 1/4$ .

L'allure du profil est donnée ci-dessous (allure obtenue avec  $\beta_1 = 0,95$ ).



## II/Le choix du sablier

**11.** On peut imaginer un « effet de voute » formé par certains grains qui dévient des forces pesantes sur les parois du cylindre. Cela peut même conduire à un éclatement du cylindre mais surtout la mesure de la masse contenue dans un silo par une pesée sur un plateau mobile en fond de silo peut être très sous-estimée.

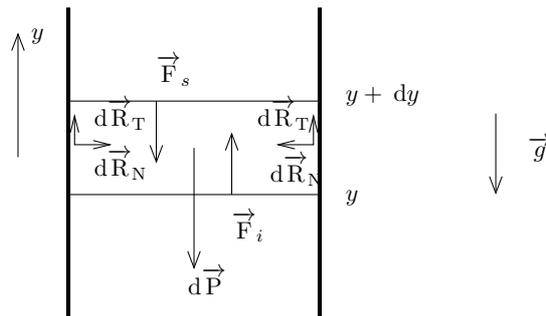
**12.** Dans un fluide la pression est une grandeur isotrope, ce qui est mis en défaut par la définition d'une pression radiale différente de la pression verticale.

**13.** Les forces à prendre en compte sont :

- le poids du sable  $d\vec{P} = \mu_s \pi R_c^2 dy \vec{g} = -\mu_s \pi R_c^2 dy g \vec{u}_y$  ;
- les forces de pressions exercées sur les surfaces  $S = \pi R_c^2$  en  $y + dy$  et  $y$  :  $\vec{F}_s = -p_v(y + dy) \pi R_c^2 \vec{u}_y$  et  $\vec{F}_i = p_v(y) \pi R_c^2 \vec{u}_y$  ;

• les forces de contact exercées par la paroi. La somme des forces radiales  $d\vec{R}_N$  est nulle par symétrie mais il subsiste une force tangentielle dont la résultante est orientée selon  $\vec{u}_y$  au total soit  $d\vec{R}_T = dR_T \vec{u}_y$ .

On écrit l'équilibre de la tranche de sable. Pour cela on doit obtenir une expression de la force  $d\vec{R}_T$  qui



s'exerce verticalement sur le bord de la tranche. On peut obtenir sa norme à l'aide de la loi rappelée qui lie les forces de frottement normale et tangentielle. Le principe des actions réciproques indique que l'action normale à la paroi exercée par la paroi sur le sable s'oppose à l'action normale du sable sur la paroi qui, sur une surface  $dS$  de paroi n'est autre que la force de pression radiale  $p_r dS$ . Ainsi pour un élément de surface  $dS$  de la paroi,

la norme de la force de contact radiale est  $f p_r dS$ . Pour la totalité de la tranche d'épaisseur  $dy$ , la surface latérale vaut  $2\pi R_c dy$  ce qui permet d'écrire

$$d\vec{R}_T = 2\pi R_c f p_r dy \vec{u}_y = 2\pi R_c f \kappa p_v dy \vec{u}_y$$

L'équilibre vertical de la tranche s'écrit alors selon  $\vec{u}_y$

$$-\mu_s \pi R_c^2 dy g + (p_v(y) - p_v(y + dy)) \pi R_c^2 + 2\pi R_c f \kappa p_v(y) dy = 0$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{dp_v}{dy} - \frac{2f\kappa}{R_c} p_v = -\mu_s g}$$

14. La résolution de cette équation différentielle du premier ordre avec la condition limite  $p_v(h) = p_{atm}$  permet d'obtenir

$$p_v(y) = \frac{\mu_s g R_c}{2\kappa f} + \left( p_{atm} - \frac{\mu_s g R_c}{2\kappa f} \right) e^{-\frac{2\kappa f (h-y)}{R_c}}$$

soit avec  $\Lambda = \frac{R_c}{2f\kappa}$

$$\boxed{p_v(y) = \mu_s g \Lambda + \left( p_{atm} - \mu_s g \Lambda \right) e^{-\frac{h-y}{\Lambda}}}$$

Pour  $R_c = 1 \text{ m}$ ,  $\Lambda = 2,6 \text{ m}$  et pour  $R_c = 1 \text{ cm}$ ,  $\Lambda = 2,6 \text{ cm}$ .

15. On distingue les deux cas :

◇ Cas où  $h - y \ll \Lambda$

On écrit  $e^{-\frac{h-y}{\Lambda}} \simeq 1 - \frac{h-y}{\Lambda}$  et alors  $p_v(y) \simeq p_{atm} - \frac{(p_{atm} - \mu_s g \Lambda)(h-y)}{\Lambda}$

◇ Cas où  $h - y \gg \Lambda$

On considère dans ce cas que  $e^{-\frac{h-y}{\Lambda}} \simeq 0$  et alors  $p_v(y) \simeq \mu_s g \Lambda$ . Dans la mesure où  $h \gg \Lambda$ , la condition  $h - y \gg \Lambda$  revient à écrire que  $y \ll h$ . Cette expression est donc valable dans le bas du cylindre.

16. On vient donc de voir qu'aux grandes profondeurs (dans le fond du cylindre avec  $h \gg \Lambda$ ) la pression tend bien vers une valeur limite qui est indépendante de  $h$ . Cette pression limite ( $\mu_s g \Lambda$ ) est bien plus faible que celle qu'on mesurerait à la base d'un cylindre de même hauteur  $h$  rempli d'un liquide de même masse volumique  $\mu_s$  (alors  $p(y=0) = p_{atm} + \mu_s g h$ ). On peut considérer que la longueur  $\Lambda$  quantifie la longueur à partir de laquelle l'écrantage de la pression par effet de voûte commence à intervenir.

17. Dans un sablier, si la pression à la base peut être considérée comme indépendante de la hauteur de sable dans le sablier, le débit d'écoulement ne dépendra pas de cette hauteur. Cela n'est valable que lorsque la hauteur de sable dans le sablier est suffisante (supérieure à  $\Lambda$ ). Pour un sablier de cuisine, c'est vrai durant la plus grande partie de l'écoulement mais pas à la fin.

## B- Quelques propriétés des horloges à pendule

### I/ Oscillations d'un pendule simple idéal

#### a. Description du mouvement

18. La masse  $m$  placée en P subit sont poids  $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$  et la tension du fil dirigée de P vers O :  $\vec{T} = T \frac{\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|}$

avec  $T > 0$ .

On écrit l'énergie cinétique de P sous la forme  $E_c = \frac{1}{2} m l_0^2 \dot{\alpha}^2$  et son énergie potentielle de pesanteur (dont

dérive le poids) sous la forme  $E_p = mgy + \text{cte}$ . On détermine la constante avec  $E_p(y = -l_0) = 0$  ce qui donne  $E_p = mg(y + l_0)$  soit avec  $y = -l_0 \cos \alpha$

$$E_m = ml_0 \left( \frac{l_0 \dot{\alpha}^2}{2} + g(1 - \cos \alpha) \right)$$

La tension du fil ne travaille pas puisqu'elle est à tout instant dirigée orthogonalement au mouvement de P, on peut affirmer que l'énergie mécanique est une constante du mouvement ainsi on peut la déterminer à l'instant initial où l'énergie cinétique est nulle donc

$$E_m = mgl_0(1 - \cos \alpha_0)$$

**19.** On écrit que l'énergie mécanique est une constante du mouvement :  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  ce qui donne

$$\dot{\alpha} l_0 (l_0 \ddot{\alpha} + g \sin \alpha) = 0$$

Lors du mouvement  $\dot{\alpha} \neq 0$  donc on obtient

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

Cette grandeur  $\omega_0$  a la dimension de l'inverse d'un temps.

### b. Période des oscillations

**20.** On écrit encore le fait que l'énergie mécanique est une constante du mouvement sachant qu'à l'instant initial  $E_c = 0$ . L'expression de l'énergie potentielle a été établie à la question **17**, sachant qu'ici à l'instant initial  $y(t = 0) = -l_0 \cos \alpha_0$ , on peut écrire qu'à l'instant initial  $E_p = mg(l_0 - l_0 \cos \alpha_0)$  ainsi

$$E_m = ml_0 \left( \frac{l_0 \dot{\alpha}^2}{2} + g(1 - \cos \alpha) \right) = mgl_0(1 - \cos \alpha_0)$$

Avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}$ , on obtient  $\dot{\alpha}^2 = 2\omega_0^2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$  ce qui permet d'écrire

$$\dot{\alpha} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}$$

**21.** Il faut un quart de période pour que le pendule passe la première fois par la verticale. Durant cette phase l'angle  $\alpha$  diminue et appartient à l'intervalle  $[0; \alpha_0]$  donc  $\dot{\alpha} = -\omega_0 \sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)} < 0$ .

**22.** Ainsi pour  $t \in [0; T/4]$  :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega_0 \sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)} = -2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\alpha_0}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}$$

soit aussi

$$dt = - \frac{d\alpha}{2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\alpha_0}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}}$$

De  $t = 0$  à  $t = \frac{T}{4}$ ,  $\alpha$  varie de  $\alpha_0$  à 0 dont en intégrant

$$\frac{T}{4} = - \frac{1}{2\omega_0} \int_{\alpha_0}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\alpha_0/2) - \sin^2(\alpha/2)}}$$

soit avec  $\frac{1}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi}$

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\alpha_0/2) - \sin^2(\alpha/2)}}$$

**23.** Avec les indications de l'énoncé on peut écrire

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{x\sqrt{1 - \sin^2(\psi)}}$$

or avec  $\sin \frac{\alpha}{2} = x \sin \psi$ , on écrit :  $\frac{d(\sin(\alpha/2))}{d\alpha} = \frac{\cos(\alpha/2)}{2} = x \cos \psi \frac{d\psi}{d\alpha}$ . Et puisque sur l'intervalle  $[0; \alpha_0]$ ,  $\cos(\alpha/2) > 0$ , on peut aussi écrire  $\cos(\alpha/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)}$  ce qui donne

$$d\alpha = \frac{2x \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)}} d\psi = \frac{2x \cos \psi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} d\psi$$

De plus quand  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\sin(\alpha/2) = x = \sin(\alpha_0/2)$  ce qui signifie qu'alors  $\psi = \frac{\pi}{2}$  d'où

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2x \cos \psi}{x\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi} \sqrt{1 - \sin^2(\psi)}} d\psi$$

Comme sur l'intégrale,  $\psi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , on peut aussi affirmer que  $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2(\psi)}$  ce qui donne

$$\boxed{T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}}}$$

### c. Isochronisme des petites oscillations

**24.** Si  $\alpha_0 \ll 1$ , alors aussi  $x = \sin(\alpha_0/2) \ll 1$  et donc  $x^2 \sin^2 \psi \ll 1$  si bien qu'à l'ordre 1 en  $x$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} = 1 + o(x)$$

ce qui donne  $T \simeq \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi$  soit  $\boxed{T \simeq T_0}$ .

**25.** On calcule  $l_0 = 1,0 \text{ m}$ .

### d. Corrections de la période du pendule en tenant compte de l'amplitude

**26.** À l'ordre 2 en  $x$ , on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{x^2}{2} \sin^2 \psi + o(x^2)$$

ainsi  $K(x) \simeq \int_0^{\pi/2} (1 + \frac{x^2}{2} \sin^2 \psi) d\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 - \cos(2\psi)}{2} \right) d\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2 \pi}{8} - \frac{x^2}{2} \left[ \frac{\sin(2\psi)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2 \pi}{8}$

On peut donc écrire

$$\boxed{K(x) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + o(x^2)}$$

**27.** Avec le résultat de la question **22**, on en déduit :  $T \simeq T_0 + T_0 \frac{x^2}{4}$ . Or ici  $x^2 = \sin^2(\alpha_0/2) \simeq \frac{\alpha_0^2}{4}$  puisque  $x \ll 1$  ce qui donne

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right) = T_0 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)$$

c'est à dire

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\alpha_0^2}{16}}$$

**28.** Numériquement  $\frac{\Delta T}{T_0} = 0,0043$  pour  $\alpha_0 = 15^\circ = \frac{15\pi}{180}$  rad.

## II/ La mesure de $g$ avec un pendule

**29.** L'erreur faite sur la mesure de la période  $T_0$  peut être quantifiée par l'écart  $\Delta T_0 = T - T_0$  et l'erreur relative par  $\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{T}{T_0} - 1$ . Pour un angle  $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ , on lit sur les courbes  $\frac{T}{T_0} \simeq 1,07$  ce qui donne

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} \simeq 0,07$$

Avec la formule  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ , on en déduit

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

soit, toujours avec  $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\frac{\Delta g}{g} \simeq 0,14$$

une erreur sur  $g$  déjà importante. Pour un angle  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ , on lit de même

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} \simeq 0,18 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta g}{g} \simeq 0,36$$

l'erreur est cette fois conséquente.

**30.** On constate sur les courbes que l'expérimentateur qui mesure la période du pendule en la prenant pour la période  $T_b$  réalise une erreur de l'ordre de  $T - T_b \simeq 0,025T_0$  pour  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi

$$\frac{\Delta T_b}{T_0} = 0,025$$

Cette erreur sur la période  $T_b$  en donne une sur la période  $T_0$  qu'on peut aussi évaluer à l'aide de la formule de Borda selon  $\Delta T_b = \left( 1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right) \Delta T_0$  ce qui donne numériquement  $\frac{\Delta T_0}{T_0} \simeq \frac{0,025}{\left( 1 + \frac{\pi^2}{64} \right)} \simeq 0,022$ . Et on obtient

comme à la question précédente l'erreur relative sur  $g$  selon

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta T_0}{T_0}$$

soit  $\frac{\Delta g}{g} \simeq 0,044$ . L'apport du théoricien est important.

**31.** On peut estimer qu'avec un rapporteur gradué en degré une mesure de l'angle  $\alpha_0$  (en degrés) se situe dans

un intervalle  $[\alpha_0 - 0,5^\circ; \alpha_0 + 0,5^\circ]$  c'est à dire en radians dans un intervalle  $\left[\alpha_0 - \frac{\pi}{360}; \alpha_0 + \frac{\pi}{360}\right]$ . Avec la mesure de  $\alpha_0$ , on réalise un grand nombre de tirages aléatoires d'un angle dans cet intervalle et pour chaque valeur obtenue, on calcule selon la formule de Borda :

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)^2$$

Dans cette formule, on suppose que  $\ell$  et  $T$  sont parfaitement connues. La valeur moyenne des valeurs de  $g$  obtenues permet d'obtenir une bonne estimation de la mesure de  $g$  et l'écart-type de ces valeurs donne une bonne estimation de son incertitude-type.

## C- Les horloges « vivant de l'air »

### I/ Le moteur à changement de phase de l'horloge Atmos

32. En supposant que le chloroéthane sous forme de vapeur est un gaz parfait, le volume massique de la vapeur (phase  $\beta$ ) s'écrit :

$$v = \frac{V}{nM} = \frac{nR\Theta}{np_{\text{sat}}M} = \frac{R\Theta}{Mp_{\text{sat}}}.$$

D'après la formule de l'énoncé (formule de Clapeyron), on a :

$$\frac{dp_{\text{sat}}}{d\Theta} = \frac{Mh_{\text{liq.} \rightarrow \text{vap.}} \times p_{\text{sat}}}{R\Theta^2} = \frac{\Delta H^{\text{liq.} \rightarrow \text{vap.}} \times p_{\text{sat}}}{R\Theta^2},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dp_{\text{sat}}}{p_{\text{sat}}} = \frac{\Delta H^{\text{liq.} \rightarrow \text{vap.}} d\Theta}{R\Theta^2}.$$

Par intégration, on obtient :

$$\ln(p_{\text{sat}}) = \frac{\Delta H^{\text{liq.} \rightarrow \text{vap.}}}{R} \left[-\frac{1}{\Theta}\right] + \text{Cte.}$$

Pour  $p_{\text{sat}} = p_{\text{atm}}$ ,  $\Theta = \Theta_{\text{eb}}$ , donc :

$$\text{Cte} = \ln(p_{\text{atm}}) + \frac{\Omega}{\Theta_{\text{eb}}},$$

où  $\Omega \equiv \Delta H^{\text{liq.} \rightarrow \text{vap.}}/R$ . Il vient :

$$p_{\text{sat}}(\Theta) = p_{\text{atm}} \exp - \left[ \Omega \left( \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_{\text{eb}}} \right) \right].$$

33. De la formule précédente, on déduit, pour  $\Theta = \Theta_0$ ,  $p_{\text{sat}}(\Theta_0) = p_0$  :

$$\Theta_{\text{eb}} = \frac{1}{\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Omega} \ln \left[ \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \right]}.$$

34.  $\Omega = \Delta H^{\text{liq.} \rightarrow \text{vap.}}/R = 24,6 \times 10^3/8,31 = 2960,3$  K. D'où  $\Theta_{\text{eb}} = 285,39$  K, soit  $\approx 12,3^\circ$  C. Dans les conditions de température et de pression ambiantes à Paris, le chloroéthane existe donc sous forme des deux phases liquide et vapeur à l'équilibre.

- 35.** Lorsque la température dépasse cette valeur, l'équilibre du mélange liquide-vapeur est déplacé. La pression de vapeur saturante augmente et plus de liquide est transformé en vapeur, augmentant la pression à l'intérieur du soufflet, qui s'expand.
- 36.** À  $\Theta = 30^\circ \text{ C}$ , la pression de vapeur saturante est, d'après l'expression obtenue à la question **32.**,  $p_{\text{sat}}(30^\circ) = 186,0 \times 10^3 \text{ Pa}$ . Le nombre de moles de chloroéthane sous forme de vapeur est alors :

$$n = \frac{p_{\text{sat}}(30^\circ)L_{\text{max}}S_p}{R\Theta},$$

soit  $n = 0,04 \text{ mol}$ , soit une masse de chloroéthane  $m = nM = 0,04 \times 64,5 = 2,62 \text{ g}$ . La masse de chloroéthane minimale pour qu'il y ait du liquide jusqu'à  $\Theta = 30^\circ \text{ C}$  est donc  $2,62 \text{ g}$ .

- 37.** On se place à  $\Theta = \Theta_0 = 20^\circ \text{ C}$ . La force de pression  $F_p$  s'exerçant sur le piston (donc que l'on doit exercer sur le piston pour le maintenir à l'équilibre mécanique) est  $F_p = F_{\text{chloro}} - F_{\text{atm}}$ , où  $F_{\text{chloro}}$  est la force due à la pression du chloroéthane à la pression de vapeur saturante dans le soufflet, et  $F_{\text{atm}}$  la force qu'exerce l'atmosphère extérieure sur le piston [FAIRE UN SCHÉMA]. On a donc :

$$F_p = (p_{\text{sat}} - p_{\text{atm}})S_p.$$

A.N. :  $F_p = 251,3 \text{ N}$ . C'est équivalent de  $25 \text{ kg}$  pesant sur le piston !

La norme de la force de rappel du ressort qui compense la force  $F_p$  est  $F_{\text{rappel}} = k|x_p| = F_p$ , avec  $k = 24 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$ . On trouve  $|x_p| = F_p/k \approx 10,5 \text{ mm}$ .

- 38.** L'équilibre statique du piston soumis aux forces extérieures  $F_{\text{rappel}}$  et  $F_p$  s'écrit dans la direction  $(Ox)$  comme :

$$-x_p \cdot k - F_{\text{atm}} + F_{\text{chloro}} = -x_p \cdot k + F_p = 0.$$

On en tire :

$$x_p(\Theta) = \frac{(p_{\text{sat}}(\Theta) - p_{\text{atm}})S_p}{k}.$$

- 39.** On a, en différentiant l'expression précédente et en utilisant l'expression de la question **32.** au voisinage de  $\Theta = \Theta_0$  :

$$dx_p = \frac{dp_{\text{sat}}(\Theta)S_p}{k} \approx \boxed{p_0 \frac{\Omega}{k} S_p \frac{d\Theta}{\Theta_0^2}}.$$

A.N. : Une variation de  $d\Theta = 1^\circ \text{ C}$  entraîne une variation de l'élongation  $dx_p = 1,50 \text{ mm}$ .

- 40.** D'après la question **38.** :

$$x_p(\Theta) = \frac{(p_{\text{sat}}(\Theta) - p_{\text{atm}})S_p}{k}$$

avec :

$$p_{\text{sat}}(\Theta) = p_0 \exp \left[ \Omega \left( \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0} \right) \right],$$

soit :

$$x_p(\Theta) = \left\{ p_0 \exp \left[ \Omega \left( \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta_0} \right) \right] - p_{\text{atm}} \right\} \frac{S_p}{k},$$

d'où l'on extrait :

$$\Theta = \frac{1}{\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Omega} \ln \left[ \frac{kx_p(\Theta)}{S_p p_0} + \frac{p_{\text{atm}}}{p_0} \right]}.$$

A.N. :  $\Theta = 313,15 \text{ K}$ , soit  $\approx 40^\circ \text{ C}$ . Aux conditions ambiantes de température et de pression à Paris, le ressort n'atteint pas son élongation maximale, permettant un fonctionnement continu de l'horloge, sans risque de détérioration du système.

## II/ Stockage et récupération de l'énergie

41. L'analyse de la figure conduit à  $C_r = 1,33 \text{ N}\cdot\text{cm}$  (valeur moyenne prise sur l'intervalle où le couple varie linéairement en fonction du nombre de tours dont le ressort spiral est enroulé). En extrapolant les données à 0, on trouve  $C_r^0 \approx 0,75 \text{ N}\cdot\text{cm}$ . Cette valeur non nulle traduit le fait que le ressort spiral, par construction, possède à vide une tension non nulle, et donc un couple à vide.

42. On a :

$$L_c = \frac{D}{2} \frac{2\pi}{180},$$

soit  $L_c = 0,0023 \text{ cm}$ , correspondant à l'élongation  $dx'_p$  du ressort maintenant le soufflet. Or, d'après la question 39., une variation de température de  $1^\circ \text{ C}$  entraîne une variation de l'élongation du ressort de  $dx_p = 1,5 \text{ mm}$ . Donc :

$$d\Theta' = \frac{dx'_p}{dx_p} \approx 0,15^\circ \text{ C}.$$

43. On note  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  la force exercée par le pignon 1 sur le pignon 2, et  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  la réaction du pignon 2 sur le pignon 1. L'équilibre rotationnel du premier pignon impose pour les moments en  $O_1$  des forces extérieures appliquées :

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{T}_c) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) = \vec{0},$$

et celui pour le pignon 2 s'écrit :

$$\vec{C}_r + \vec{M}_{O_2}(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{0}.$$

En projetant sur l'axe  $(Oz)$ , on obtient :

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{2C_r}{d_2}$$

$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{T_c D}{d_1}.$$

On en déduit :

$$T_c = \frac{2C_r d_1}{D d_2}.$$

A.N. :  $T_c = 6,3 \text{ N}$ . Pour induire une rotation d'un clic, cette force fournit le travail  $W_{clic} = T_c \times L_c$ , soit  $1,4 \times 10^{-4} \text{ J}$  (en prenant  $C_r = 1,33 \text{ N}\cdot\text{cm}$ ).

44. L'énergie consommée par l'horloge chaque jour est  $E_{Atmos} = \mathcal{P} \times t_{jour}$  avec  $t_{jour} = 24 \times 3600 \text{ s}$ . Le nombre de clics par jour est  $n_{clic} = E_{Atmos}/W_{clic} \approx 2$ .

45. Une variation de  $0,15^\circ \text{ C}$  permettant 1 clic (d'après 42.), une variation de  $1^\circ \text{ C}$  permet  $1/0,15 \approx 6,7$  clics, soit un fonctionnement pendant  $6,7/2 \approx 3,3$  jours, soit environ 3 jours et 8 heures.

## III/ Considérations pratiques

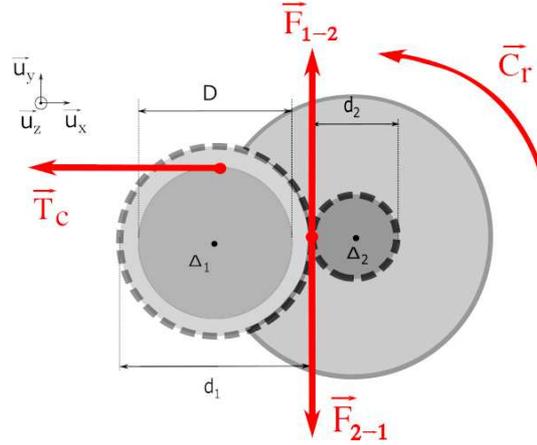


FIGURE 1 – Répartition des efforts sur les pignons 1 et 2 à l'équilibre rotationnel

46. L'énergie provient des variations de températures de la pièce qui font varier la position du piston permettant d'emmagasiner cette énergie dans le système de ressort spiral.
47. Pour transmettre ces variations de températures de manière non atténuée et rapidement au chloroéthane, il convient d'utiliser un réservoir qui est un bon conducteur de la chaleur, le métal est ainsi préféré au plastique ou au verre.
48. Pour une variation élémentaire de température  $d\Theta$ , on souhaite obtenir une variation de pression du chloroéthane la plus grande possible pour « remonter » le ressort. En négligeant le volume massique du chloroéthane liquide devant celui de chloroéthane gazeux la formule donnée par l'énoncé (page 10) permet d'écrire

$$\frac{dp}{d\Theta} = \frac{h_{\text{liq} \rightarrow \text{vap}}}{\Theta v_{\text{vap}}}$$

pour un mélange diphasé liq/vap. En utilisant du chloroéthane gazeux seulement considéré comme un gaz parfait on aurait  $pv_{\text{vap}} = \frac{1}{M}R\Theta$  où  $M$  est la masse molaire du chloroéthane et  $v_{\text{vap}}$  son volume massique sous forme gazeuse. On peut alors comparer les deux termes  $\left(\frac{dp}{d\Theta}\right)_{\text{diphasé}}$  et  $\left(\frac{dp}{d\Theta}\right)_{\text{GP}}$  par le rapport

$$\frac{\left(\frac{dp}{d\Theta}\right)_{\text{diphasé}}}{\left(\frac{dp}{d\Theta}\right)_{\text{GP}}} = \frac{\frac{h_{\text{liq} \rightarrow \text{vap}}}{\Theta v_{\text{vap}}}}{\frac{R}{M v_{\text{vap}}}} = \frac{M h_{\text{liq} \rightarrow \text{vap}}}{R\Theta} = \frac{\Delta H^{\text{liq} \rightarrow \text{vap}}}{R\Theta}$$

On peut évaluer ce rapport au voisinage d'une température ambiante de  $20^\circ \text{C}$  soit  $\Theta = 293 \text{K}$  ce qui donne un rapport de l'ordre de l'ordre de 10 avec les valeurs numériques fournies. La variation de pression, pour une même variation de température, est donc dix fois supérieure en utilisant un mélange diphasé à la place de chloroéthane gazeux seul.

## D- Dérives d'horloges

49. Si la dérivée d'une horloge Atmos est de  $p$  secondes par jours, alors  $D_{\text{Atmos}} = \frac{p}{24 \times 3600}$  soit de l'ordre de quelques  $10^{-5} \text{s} \cdot \text{s}^{-1}$ . Les facteurs pouvant expliquer cette dérive sont essentiellement des facteurs mécaniques (usure, dilatation thermique du soufflet,...)

50. Par un calcul similaire  $D_q = \frac{0,5}{24 \times 3600} = 6 \times 10^{-6} \text{ s} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On peut aussi écrire que cette dérive est celle de la période de l'oscillateur puisque c'est une grandeur relative et donc aussi, toujours en grandeur relative, que  $D_q = \frac{\Delta\nu_q}{\nu_q}$  on obtient  $\Delta\nu_q = 0,19 \text{ Hz}$ .

51. De même ici  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0}$  ce qui donne une variation relative de période de l'ordre de  $10^{-12}$ . On peut assimiler cela à la dérive de l'horloge car c'est cette période d'oscillations qui sert de référence pour l'horloge.

52. Une horloge à quartz ne suffirait pas car sa dérive est beaucoup trop importante. Ce qu'on recherche avec le système GPS est une précision sur une distance à partir de la mesure de temps de trajet d'ondes électromagnétiques. Si on appelle  $\tau$  ce temps de trajet les distances mesurées entre les satellites GPS et les récepteurs sont de l'ordre de  $d = c\tau$ , ce qui donne

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\delta\tau}{\tau}$$

En assimilant  $\frac{\delta\tau}{\tau}$  à la seule dérive de l'horloge, pour des distances de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (altitude typique des satellites GPS), avec une dérive  $D_q$ , on trouve  $\Delta d$  de l'ordre du mètre ce qui n'est pas d'une précision suffisante.